

Funktionentheorie · Sommersemester 2006

Literaturempfehlungen :

- Ahlfors, *Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1953)
Freitag und Busam, *Funktionentheorie* (Springer, 1993)
Conway, *Functions of one complex variable* (Springer GTM 11)
Jänich, *Funktionentheorie* (Springer, 1993)
Knopp, *Funktionentheorie 1,2* (Götschen, de Gruyter, 1976, 1981)
Remmert, *Funktionentheorie 1,2* (Springer Grundwissen Mathematik, 1992)

1. Der Körper der komplexen Zahlen; Erinnerungen aus der Analysis

$\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet den Körper der komplexen Zahlen. Dies ist ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $1, i$ und zugleich ein kommutativer Körper über die Regel $i^2 = -1$.

\mathbb{C} besitzt die Metrik $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und wird damit ein topologischer Raum: $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ ist die ε -Umgebung von z_0 ($0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$);

$U \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn zu jedem $u \in U$ ein positives reelles ε mit $U \supset U_\varepsilon(u)$ existiert; kompakte Teilmengen von \mathbb{C} sind genau die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen;

Cauchyfolgen konvergieren in \mathbb{C} , genauer: $z_n = \alpha_n + i\beta_n \rightarrow z = \alpha + i\beta$, wenn $\alpha_n \rightarrow \alpha$ und $\beta_n \rightarrow \beta$).

Über die reguläre Darstellung $z \mapsto [a \mapsto za, a \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2]$ entspricht $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ der 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$ und $z \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist ein Körperisomorphismus (mit Bild $\subset \mathbb{R}_{2 \times 2}$). Bis auf Konjugation ist dies die einzige Realisierung von \mathbb{C} in $\mathbb{R}_{2 \times 2}$, denn die Jordanform vom Bild von i ist (wieder bis auf Konjugation) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen kommt aus der Darstellung $z = \alpha + i\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$. Der Addition zweier komplexer Zahlen entspricht die Vektoraddition im \mathbb{R}^2 , der Multiplikation die Addition der Winkel modulo 2π bei gleichzeitiger Multiplikation der Längen.

2. Differentiation

Wir interessieren uns für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei U eine (meist offene) Teilmenge von \mathbb{C} ist. Die Stetigkeit von f in $u \in U$ ist genauso erklärt wie die im \mathbb{R}^2 , wenn also \mathbb{C} wie oben

mit dem \mathbb{R}^2 identifiziert wird. Tun wir das und fassen \mathbb{C} nur als Vektorraum \mathbb{R}^2 auf, so liefert die Differenzierbarkeit von f im Punkt $z_0 \in U$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \beta}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \beta}(z_0) \end{pmatrix}, \quad (f(z) = f_1(z) + if_2(z), f_i(z) \in \mathbb{R}; z = \alpha + i\beta \in U)$$

und diese lineare Abbildung stellt (bei unserer Basiswahl $1, i$) eine komplexe Zahl genau dann dar, wenn die Diagonale die Form (α, α) und die Nebendiagonale die Form $(-\beta, \beta)$ hat, i.e.,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial \beta}(z_0), \quad \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(z_0) = -\frac{\partial f_1}{\partial \beta}(z_0).$$

Dies sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Gleichbedeutend mit ihrer Existenz ist

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z_0 \neq z \in U}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existiert;}$$

der Limes heißt dann Differentialquotient von f bei z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. Beachte, daß in \mathbb{C} , im Gegensatz zum \mathbb{R}^2 , dividiert werden kann! Die neue Definition von Differenzierbarkeit (in \mathbb{C}) ist also weitreichender als die alte (im \mathbb{R}^2).

Ist U offen und f überall in U differenzierbar, so heißt f holomorph auf U , ist zudem $U = \mathbb{C}$, so heißt f ganz.

Wie im Reellen beweist man

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (af+g)' = af'+g', \quad (fg)' = f'g+fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}, \quad (g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

für in z (bzw. $f(z)$) differenzierbare Funktionen f und g und $a \in \mathbb{C}$ konstant. Des weiteren: Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergieren innerhalb ihres Konvergenzkreises mit Radius $0 \leq \rho = \limsup(\sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \in \mathbb{R}$ und sind dort holomorph und gliedweise differenzierbar.

Beispiele: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $|e^{x+iy}| = e^x$ ($x, y \in \mathbb{R}$); $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Beobachtung:

$$0 \neq A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{R}_{2 \times 2} \text{ hat positive Determinante } a \in \mathbb{R} \text{ und Inverses } \frac{1}{a} A^T.$$

Invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$ mit $AA^{-1} = A^T$ strecken die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ um den Faktor $b = \sqrt{a}$ und sind winkeltreu. Also liefern die $0 \neq z \in \mathbb{C}$ winkeltreue Abbildungen auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Umgekehrt, erfüllt $A \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$

$$\det(A) > 0 \quad \text{und} \quad |Av| = b|v|,$$

so ist $\frac{1}{b} A$ orthogonal, also $A \in \mathbb{C}$.

Interpretation: $U \subset \mathbb{C}$ sei offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Des weiteren seien $w_j: [a, b] \rightarrow U$, $j = 1, 2$, zwei Wege, das sind differenzierbare Abbildungen des reellen abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ nach U , also

$$w_j(t) = x_j(t) + iy_j(t), \quad t \in [a, b]; \quad x_j \text{ und } y_j \text{ differenzierbar und } w_j'(t) = x_j'(t) + iy_j'(t).$$

Es gelte $w_1(t_0) = w_2(t_0) = u_0$ für ein $t_0 \in [a, b]$. Dann ist der Winkel zwischen den Tangenten $s \mapsto u_0 + w'_j(t_0)s$ ($s \in \mathbb{R}$) bei u_0 an die beiden Wege w_j derselbe wie der für die um f verschobenen Wege $f \circ w_j$ (hier ist $w'_j(t_0) \neq 0$ und $f'(u_0) \neq 0$ vorausgesetzt).

Beispiele einiger besondere holomorpher Abbildungen :

Jetzt sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{2 \times 2}$ eine komplexe Matrix. Sie induziert die gebrochene lineare Funktion

$$g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{wenn } (c, d) \neq (0, 0).$$

Ihre Ableitung ist $g'_A(z) = \det(A)/(cz+d)^2$. Genau wenn $\det(A) \neq 0$ ist, ist g_A nicht konstant; dies sei im folgenden stets der Fall. Es gilt dann

1. $g_A = \text{id} \iff A = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}, a \neq 0$
2. $g_{AB} = g_A \circ g_B$
3. $c = 0 \implies g_A$ holomorph auf \mathbb{C}
4. $c \neq 0 \implies [g_A \text{ holomorph auf } \mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\} \text{ mit Bild } \mathbb{C} \setminus \{ac^{-1}\}]$.

DEFINITION. $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ heißt die obere Halbebene (und ist offen in \mathbb{C});
 $B_1 = U_1(0)$ ist die offene Kreisscheibe um 0 vom Radius 1;
 $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{r \leq 0\}$ ist die an der negativen reellen Achse aufgeschlitzte Ebene (sie ist offen in \mathbb{C}).

Es gilt :

1. $g_A : H \rightarrow B_1$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung
 $g_{\tilde{A}}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $z \mapsto -z^2 : H \rightarrow \mathbb{C}_-$ ist holomorph und bijektiv
3. $z \mapsto \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 : B_1 \rightarrow \mathbb{C}_-$ ist holomorph und bijektiv.
4. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, i.e., $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $\det(A) = 1$, so ist g_A ein biholomorpher Automorphismus auf H (mit dem Inversen $g_{A^{-1}}$).

3. Integration

Zunächst integrieren wir stetige Funktionen $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, die auf reellen Intervallen definiert sind, und zwar so

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(t)dt + i \int_{\alpha}^{\beta} f_2(t)dt \in \mathbb{C}$$

mit $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, $f_{1,2}(t) \in \mathbb{R}$.

Selbstverständlich gelten die üblichen Regeln:

\int_{α}^{β} ist \mathbb{C} -linear, $\int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\gamma} = \int_{\alpha}^{\gamma}$, $\int_{\alpha}^{\beta} = -\int_{\beta}^{\alpha}$, $\Re(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt) = \int_{\alpha}^{\beta} \Re f(t)dt$, $\Im(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt) = \int_{\alpha}^{\beta} \Im f(t)dt$, $|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt$.

$f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ heie stetig differenzierbar, falls f_1 und f_2 beide stetig differenzierbar sind. Setze dann $f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$. Wieder gelten die üblichen Regeln:

Linearität, Produkt- und Quotientenregel; die Kettenregel wird zu

g sei holomorph auf U , $f : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ sei (stetig) differenzierbar, dann gilt $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$.

$F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f , wenn F stetig differenzierbar ist und $F' = f$ erfüllt. Es gilt

1. $\int_{\alpha}^x f(t)dt = F(x)$ ist Stammfunktion von f ,
2. ist F Stammfunktion von f , so ist $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$,
3. zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich um eine Konstante;
4. schließlich die Transformationsregel

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\delta)} f(t)dt$$

für $\varphi : [\gamma_1, \delta_1] \rightarrow [a, \beta]$ stetig differenzierbar und $\gamma, \delta \in [\gamma_1, \delta_1]$, sowie

5. die partielle Integrationsregel

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)g(t)dt$$

für stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$.

Weg: Eine stetige Abbildung $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auch Weg w (oder Kurve) mit Anfangspunkt $z(\alpha)$ und Endpunkt $z(\beta)$. Nullwege sind konstante z ; eine Strecke $[z_0, z_1]$ ist der Weg $z(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$; der Kreis $K_c(\rho)$ um $c \in \mathbb{C}$ mit Radius $\rho > 0$ ist der Weg $z(t) = c + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Weg e können aneinander gehangen werden, wenn der Endpunkt des einen der Anfangspunkt des anderen ist. Dies führt zu der offensichtlichen Definition von stückweise stetig differenzierbaren Wegen, und solche seien fortan mit dem Wort *Weg* gemeint.

DEFINITION. Ist $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg w mit Bild W und ist $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so ist $\int_w f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$ das Wegeintegral von f längs des Weges w .

Beispiele :

1. $z : [\alpha, \beta] \xrightarrow{\text{id}} [\alpha, \beta]$, $\int_w f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$
2. $\int_{K_c(\rho)} (z-c)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

SATZ. Sind $w_1, [\alpha_1, \beta_1] \xrightarrow{z_1} \mathbb{C}$ und $w_2, [\alpha_2, \beta_2] \xrightarrow{z_2} \mathbb{C}$ quivalente Wege, d.h.

$\exists \varphi : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2]$, stetig differenzierbar und streng monoton wachsend,
mit $z_1 = z_2 \varphi$,

so ist $\int_{w_1} f dz_1 = \int_{w_2} f dz_2$ für jede stetige komplexwertige Funktion f auf $W_1 = W_2$.

Regeln für Wegeintegrale:

1. $\int_w (cf + g) dz = c \int_w f dz + \int_w g dz$ für $c \in \mathbb{C}$ und stetige Funktionen $f, g : W \rightarrow \mathbb{C}$.
2. Hat der Weg w_2 den Endpunkt von w_1 als Anfangspunkt, so gilt $\int_{w_1+w_2} f dz = \int_{w_1} f dz + \int_{w_2} f dz$ für stetiges $f : W_1 \cup W_2 \rightarrow \mathbb{C}$.
3. $\int_{-w} f dz = - \int_w f dz$ falls $-w$ der Weg $z(t) = z(\alpha + \beta - t)$ und $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.
4. $g : U_1 \rightarrow U_2$ sei holomorph mit stetiger Ableitung g' , w_1 sei ein Weg in U_1 und w_2 der Bildweg unter g in U_2 . Es gilt $\int_{w_2} f dz = \int_{w_1} f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta$ für stetiges $f : W_2 \rightarrow \mathbb{C}$.
5. $|\int_w f dz| \leq |f|_w \cdot L_w$ mit

$$|f|_w = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |f(z(t))| \text{ und } L_w = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

für $z(t) = x(t) + iy(t)$.

SATZ. 1. (f_n) sei eine auf W definierte Folge stetiger komplexwertiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiere. Dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_w f_n dz = \int_w f dz$.

$$2. \frac{1}{2\pi i} \int_{K_c(\rho)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1 & , z \in B_c(\rho) \\ 0 & , z \in \mathbb{C} \setminus B_c(\rho) \end{cases} \text{ mit } B_c(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \rho\}.$$

DEFINITION. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (U offen in \mathbb{C}), so heißt die auf U holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , falls $F' = f$.

(Hier reden wir also von Funktionen f , deren Argumente komplex und nicht nur reell sind – wie zuvor.)

Es gilt dann $\int_w f dz = F(z_1) - F(z_0)$ für jeden Weg w in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 . Insbesondere ist $\int_w f dz = 0$ für geschlossene Wege w in U (also Wege in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt).

FOLGERUNG. Die Funktion $z \mapsto (z - c)^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt keine Stammfunktion. (Es gibt also keinen Logarithmus auf \mathbb{C}^\times).

Beobachtungen:

1. Ist F holomorph auf U und $F' = 0$ überall, so ist F lokal-konstant.
2. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - c)^{\nu}$ hat die Stammfunktion $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu+1} (z - c)^{\nu+1}$ innerhalb ihres Konvergenzkreises.
3. Äquivalent sind für Gebiete U (das sind offene Teilmengen von \mathbb{C} , in denen sich je zwei Punkte durch einen ganz in U verlaufenden Weg verbinden lassen)

- a) die in U stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion in U
 b) $\int_w f dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg w in U .

Eine Bemerkung zum Begriff *Gebiet*:

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn $X = X_1$ für jedes $\emptyset \neq X_1 \subset X$ gilt, das offen und abgeschlossen in X ist. X heißt wegezusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte in X durch einen stetigen Weg in X verbinden lassen. Die 2. Aussage ist stärker als die 1. Ist aber U offen und zusammenhängend, so ist U ein Gebiet, also wegezusammenhängend.

DEFINITION. 1. Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so heiÙe

$$[z_1, z_2] \stackrel{\text{def}}{=} \{(1-t)z_1 + tz_2 : t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$$

die Strecke zwischen z_1 und z_2 .

2. Ein Dreieck $D \subset \mathbb{C}$ mit den Eckpunkten z_1, z_2, z_3 ist die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3, \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Sein Rand ist $\partial(D) = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$.

LEMMA. U sei ein Gebiet $\subset \mathbb{C}$, in dem es einen Punkt u_0 gebe, so daÙ $[u_0, u] \subset U$ für jedes $u \in U$ gilt. Ist dann $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt $\int_{\partial(D)} f dz = 0$ für jedes Dreieck $D \subset U$ mit Eckpunkt u_0 , so besitzt f eine Stammfunktion F in U , nämlich $F(z) = \int_{[u_0, z]} f d\zeta$.

SATZ. U sei ein Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_{\partial D} f d\zeta = 0$ für jedes Dreieck D in U .

Zum Beweis teilt man über die Seitenhalbierenden das Dreieck D in vier Teildreiecke mit je halbem Umfang, erreicht also so $|\int_{\partial D}| \leq 4^n |\int_{\partial D_n}|$ im n -ten Schritt für wenigstens eines der erhaltenen Teildreiecke D_n . Diese ziehen sich auf einen Punkt d zusammen und hier nützt man die Differenzierbarkeit von f aus:

$$f(\zeta) - f(d) = f'(d)(\zeta - d) + g(\zeta)(\zeta - d)$$

mit bei 0 stetigem g und $g(d) = 0$, i.e., $|g(\zeta)|$ wird klein auf ∂D_n für große n .

FOLGERUNG. Ist f holomorph auf einem Gebiet U wie im Lemma (z.B. auf einer offenen Kreisscheibe), so besitzt f dort eine Stammfunktion. Hierbei ist sogar erlaubt, daÙ es in U endliche viele Punkte gibt, an denen f zwar stetig, aber nicht unbedingt mehr differenzierbar ist.

Als Beispiel findet man den Hauptzweig des Logarithmus

$$U = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} : \log z = \log \rho + i\varphi \quad \text{mit } z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0, -\pi < \varphi < \pi,$$

indem man nämlich erst über die Strecke $[1, \rho]$ und dann über den Kreisbogen $K_0(\rho)$ von 0 bis φ integriert.

CAUCHYS INTEGRALFORMEL. f sei holomorph auf dem offenen $U \subset \mathbb{C}$, u sei ein Punkt in U und $\rho > 0$ so, daÙ $\overline{B}_u(\rho) \subset U$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in B_\rho(u)$.

FOLGERUNG. Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z-u)^{\nu} \quad \text{mit} \quad a_{\nu} = \frac{f^{(\nu)}(u)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-u)^{\nu+1}} d\zeta.$$

Das ist die Taylorreihenentwicklung von f in Kreisscheiben. Insbesondere folgt, daß f unendlich oft differenzierbar ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}.$$

(Hier ist wieder $u \in U, \bar{B}_u(\rho) \subset U, z \in B_u(\rho)$.)

Anwendungen:

1. Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant (das ist der sogenannte *Satz von Liouville*).

Denn f hat eine in ganz \mathbb{C} gültige Taylorreihenentwicklung und die Taylorkoeffizienten a_{ν} sind dem Betrag nach für jedes $\rho > 0$

$$\leq \frac{1}{2\pi i} 2\pi\rho \frac{\gamma}{\rho^{\nu+1}},$$

wenn $|f| \leq \gamma$. Es bleibt also nur a_0 übrig.

2. Jedes Polynom $f(z) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad ≥ 1 hat eine komplexe Nullstelle (das ist der sogenannte *Hauptsatz der Algebra*).

Sonst wäre nämlich $\frac{1}{f(z)}$ ganz und beschränkt, also konstant.

Wir bemerken noch der Vollständigkeit halber, daß wir den sogenannten *Satz von Morera*

ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und gilt $\int_{\partial D} f(\zeta)d\zeta = 0$ für jedes Dreieck $D \subset U$, so ist f holomorph

im Zuge der Herleitung der Cauchyschen Integralformel mitbewiesen haben, da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist.

Weitere Folgerungen aus dem Cauchyschen Satz:

- A. Sind $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ verschiedene holomorphe Funktionen auf dem Gebiet U , so gilt

a) $\{z \in U : f_1(z) = f_2(z)\}$ hat keinen Häufungspunkt in U ,

b) es gibt kein $z \in U$ mit $f_1^{(k)}(z) = f_2^{(k)}(z)$ für alle $k \geq 0$.

Beispiel: $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ hat höchstens eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet $U \supset [\alpha, \beta]$.

Eine Anwendung: f, f_1, f_2 seien holomorph um z_0 (i.e. in einer offenen Umgebung von z_0). Setze

$$v(f) = v_{z_0}(f) = \min\{\infty \geq k \geq 0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}.$$

Dann gilt $v(f) = \infty \iff f = 0$ lokal bei z_0 , $v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2)$, $v(f_1 + f_2) \geq \min(v(f_1), v(f_2))$.

- B. f sei holomorph auf dem offenen U mit Ausnahme von einer diskreten und abgeschlossenen Teilmenge T von U , dort aber noch stetig¹. Dann läßt sich f zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fortsetzen (Riemann).
- C. Ist f holomorph auf U (offen) und nirgends lokal konstant, so ist f offen (d.h. $f(O)$ ist offen, falls O offen ist). Insbesondere ist ein holomorphes nichtkonstantes Bild eines Gebietes wieder ein Gebiet.
- D. U sei ein beschränktes Gebiet und f holomorph auf U und stetig auf \bar{U} . Dann nimmt $|f|$ das Maximum auf $\partial(U) = \bar{U} \setminus U$ an (Maximumsprinzip).
- E. U sei offen und f holomorph und injektiv auf U . Dann ist $f' \neq 0$ auf U und f^{-1} holomorph auf $f(U)$ mit $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$. Beispiele lokal-injektiver f sind holomorphe f mit $\exists c \in U$ mit $f'(c) \neq 0$.
- F. U sei offen, $u_0 \in U$ und f holomorph auf U . Gilt $v_{u_0}(f) = k$, $1 \leq k < \infty$, so existiert in einer kleinen Umgebung von u_0 ein holomorphes h mit $v_{u_0}(h) = 1$ und $f = h^k$. Des weiteren existiert zu jedem hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(\varepsilon) \subset U$ von u_0 mit $f(U(\varepsilon)) = U_\varepsilon(0)$, in der $f|_{U(\varepsilon)}$ jeden Wert genau k -mal annimmt.
- G. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-u)^\nu$ habe den endlichen Konvergenzradius ρ . Auf dem Rand $K_u(\rho)$ liegt dann ein singulärer Punkt z_1 von f , d.h., f kann nicht holomorph auf eine kleine Umgebung von z_1 fortgesetzt werden.
- H. Die Folge f_n von auf dem offenen U holomorphen Funktionen konvergiere auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$.

Meromorphe Funktionen

f sei holomorph auf dem offenen U mit der Ausnahme von $u_0 \in U$; u_0 heißt dann eine Singularität von f in U . Und zwar

1. eine hebbare Singularität, wenn es ein holomorphes $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} = f$ auf $U \setminus \{u_0\}$ gibt,
2. ein Pol, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, daß $(z-u_0)^n f(z)$ beschränkt bei u_0 ist (das kleinste solche n heißt dann die Ordnung des Poles),
3. eine wesentliche Singularität in allen anderen Fällen.

Beobachtungen :

- a) u_0 ist hebbbar, falls f lokal um u_0 beschränkt ist.
- b) u_0 ist ein Pol der Ordnung n genau dann, wenn $f(z) = g(z)/(z-u_0)^n$ für $z \neq u_0$ mit einem auf U holomorphen g mit $g(u_0) \neq 0$ gilt.

Dazu ist auch äquivalent

Lokal um u_0 existiert eine holomorphe Funktion h mit einziger Nullstelle u_0 (die hat Ordnung n) und $f = h^{-1}$ in $U \setminus \{u_0\}$.

¹es reicht zu fordern, daß f beschränkt in kleinen Umgebungen der $t \in T$ ist; $f(t)$ selbst ist keinerlei Einschränkung unterworfen

Und ohne Angabe der genauen Ordnung gilt: u_0 ist Pol $\iff \lim_{z \rightarrow u_0} f(z) = \infty$.

c) Ist u_0 ein Pol der Ordnung n von f , so gilt lokal bei u_0 die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{\nu}(z - u_0)^{\nu}$$

für f .

SATZ. *Äquivalent sind*

- u_0 ist eine wesentliche Singularität von f in U
- $f(O \setminus \{u_0\})$ liegt dicht in \mathbb{C} für jede offene Umgebung O von u_0 in U
- $\exists z_n \in U \setminus \{u_0\}$, $\lim z_n = u_0$, $f(z_n)$ hat keinen Grenzwert in $\mathbb{C} \cup \infty$.

Das ist der Satz von Casorati und Weierstraß.

Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$, U offen, heißt meromorph, falls sie außerhalb einer diskreten Teilmenge $P_f \subset U$ komplexwertig und holomorph ist und in P_f nur Pole hat. Beispiele sind holomorphe Funktionen, die Funktion $z \rightarrow 1/z$ für $U = B_0(\rho)$ und allgemeiner alle rationalen Funktionen in z auf $U = \mathbb{C}$.

Beobachtungen:

1. P_f ist abgeschlossen in U und abzählbar².
2. Mit f ist auch f' meromorph; $P_f = P_{f'}$.
3. Alle auf U meromorphen Funktionen bilden einen kommutativen Ring $M = M_U$. $f \in M$ ist genau dann invertierbar in M , wenn die Nullstellenmenge von f in U diskret ist. Ist U ein Gebiet, so ist M ein Körper.
4. Wie schon für holomorphe Funktionen auf einem Gebiet U haben wir auch einen Identitätssatz für meromorphe Funktionen auf U :

$$f_1 \neq f_2 \iff \{z \in U \setminus (P_1 \cup P_2) : f_1(z) = f_2(z)\} \text{ hat keinen Häufungspunkt in } U \setminus (P_1 \cup P_2)$$

$$\iff \exists z \in U \setminus (P_1 \cup P_2) : f_1^{(k)}(z) = f_2^{(k)}(z) \ (\forall k \geq 0).$$
5. Die Nullstellenordnungsfunktion v besitzt folgende Verallgemeinerung auf M . Sei $z_0 \in U$. Ist f holomorph bei z_0 , so ist $v(f) = v_{z_0}(f) = \min\{\infty \geq k \geq 0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$ wie früher; ist $z_0 \in P_f$ ein Pol der Ordnung n , so ist $v(f) = v_{z_0}(f) = -n$. M.a.W.: Hat $f(z)$ in z_0 die Laurentreihenentwicklung $\sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$, $a_{-n} \neq 0$, so ist $v_{z_0}(f) = -n$. Es gelten die auf S.6 angegebenen Regeln.

Wie sieht eine auf $U \setminus \{u\}$ holomorphe Funktion f aus, die in u eine wesentliche Singularität hat?

Dazu betrachten wir zunächst spezielle Gebiete U , nämlich Kreisringe um u :

$$B_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} B_u(\rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - u| < \rho_2\}.$$

²'abzählbar' schließt 'endlich' ein

Hier ist $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \infty$. Cauchys Integralsatz für ein solches U ist

Für $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ist $\int_{K_u(\rho)} f(\zeta) d\zeta$ unabhängig von ρ .

Und Cauchys Integralformel wird zu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1,2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für auf U holomorphes f und $z \in B_{1,2}$.

Sei nun f holomorph auf $B_{1,2}$ und $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Setze

$$\text{für } z \in B_u(\rho), \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$\text{und für } z \notin \overline{B_u(\rho)}, \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beide Funktionen sind holomorph (in $B_u(\rho_2)$ bzw. in $|z - u| > \rho_1$) und unabhängig von der speziellen Wahl von ρ ; darüber hinaus gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$ und $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$ auf $B_{1,2}$. Das macht schon f_1 und f_2 eindeutig, und die Taylorreihen, in $z - u$ von $f_2(z)$ in $B_u(\rho_2)$, bzw. in $(z - u)^{-1}$ von $-f_1$ in $B_u(\rho_1)$, liefern die Laurentreihenentwicklung von f in $B_{1,2}$

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - u)^\nu, \quad a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_u(\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta$$

mit beliebigem ρ , $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Wir können jetzt umgekehrt auch formal von einer Laurentreihe $\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z - u)^\nu$ ausgehen und

$$\rho_1^{-1} = \text{Konvergenzradius von } \sum_1^{\infty} a_{-\nu} (z - u)^\nu$$

$$\rho_2 = \text{Konvergenzradius von } \sum_0^{\infty} a_\nu (z - u)^\nu \text{ setzen.}$$

Gilt dann $\rho_1 < \rho_2$, so konvergiert diese Laurentreihe in $B_{1,2}$ und ist hier holomorph.

Des weiteren: stimmen zwei Laurentreihen (um u) auf einem $K_u(\rho)$ im Holomorphiegebiet überein, so stimmen ihre Koeffizienten überein.

Das Wesen einer Singularität $u \in U$ von f kann nun so erkannt werden:

$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z - u)^\nu$ sei die Laurententwicklung von f um u in $B_u(0, \rho_2)$. Dann gilt

$$u \text{ hebbar} \iff a_\nu = 0 \text{ für } \nu < 0$$

$$u \text{ Pol der Ordnung } n \iff a_\nu = 0 \text{ für } \nu < -n, a_{-n} \neq 0$$

$$u \text{ wesentliche Singularität} \iff a_\nu \neq 0 \text{ für unendlich viele negative } \nu.$$

Umlaufzahlen

In Cauchys Integralsatz integrieren wir über Kreislinien, was für Anwendungen meist zu speziell ist. Wir ersetzen die deshalb durch sogenannte *nullhomologe* Wege w : das sind solche geschlossenen Wege in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, für die $\int_w f(\zeta) d\zeta = 0$ für jedes auf U holomorphe f gilt. Hauptbeispiel sind alle geschlossenen Wege in Gebieten U mit einem $u_0 \in U$, so daß die Verbindungsstrecken $[u_0, u]$ für jedes $u \in U$ in U enthalten sind. Der Cauchysche Integralsatz wird für nullhomologe Wege w zu

SATZ. $\text{ind}_w(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ für alle $z \in U \setminus w$.

Was ist hier der Index $\text{ind}_w(z)$ von z bezüglich w ?

Ist w irgendein geschlossener Weg in \mathbb{C} und $z \notin w$, so ist $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta-z}$ auf w definiert und stetig; es existiert also $\int_w f d\zeta$. Der Wert dieses Integrals ist ein ganzzahliges Vielfaches von

$$2\pi i. \text{ Beispiel: } w = n \cdot K_0(\rho), |z| \neq \rho : \frac{1}{2\pi i} \int_w f d\zeta = \begin{cases} 0 & |z| > \rho \\ n & |z| < \rho. \end{cases}$$

DEFINITION. w sei ein geschlossener Weg in \mathbb{C} ³.

1. $\text{ind}_w(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{1}{\zeta-z} d\zeta \in \mathbb{Z}$ für $z \notin w$.
2. $\text{In}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \setminus w : \text{ind}_w(z) \neq 0\}$ heißt das Innere von w ;
 $\text{Au}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \setminus w : \text{ind}_w(z) = 0\}$ das Äußere von w .
3. w heißt einfach geschlossen, wenn $\text{In}(w) \neq \emptyset$ und $\text{ind}_w(z) = 1$ für $z \in \text{In}(w)$ gilt.

Beobachtungen:

$\text{ind}_w(z_1) = \text{ind}_w(z_2)$ für $|z_1 - z_2|$ hinreichend klein,

$\text{In}(w)$ ist offen und beschränkt, $\text{Au}(w)$ ist offen und unbeschränkt, $\mathbb{C} = \text{In}(w) \dot{\cup} w \dot{\cup} \text{Au}(w)$,

einfach geschlossen sind z.B.

Kreise; abgeschnittene Kreisbögen, Kreissektoren, Kreisringabschnitte⁴; Dreiecks- und Rechtecksränder; konvexe n -Ecksränder; Vierecksränder mit einer Einbuchtung.

Der Residuensatz und Anwendungen

$f : U \setminus \{u\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph; U ist offen. Entwickle f in einer punktierten Kreisscheibe $B_u(0, \rho) \subset U$ um u in die Laurentreihe $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z-u)^\nu$, so daß also $a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta-u)^{\nu+1}} d\zeta$ für jeden Kreis $K = K_u(\rho')$ mit $0 < \rho' < \rho$ gilt.

DEFINITION. $\text{res}_u f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(\zeta) d\zeta$ heißt das Residuum von f bei u .

Die Definition ist auch für eine Singularitätenmenge $\{u_j\} = S$ einer auf $U \setminus S$ definierten holomorphen Funktion f sinnvoll, sofern nur S diskret ist (die Singularitäten u_j also isoliert sind).

Beobachtungen:

1. $\text{res}_u f \in \mathbb{C}$ ist charakterisiert durch “ $f - \frac{\text{res}_u f}{z-u}$ besitzt eine Stammfunktion in einer punktierten Umgebung von u ”. Insbesondere ist $\text{res}_u f = 0$ für hebbare Singularitäten u von f .
2. Ist u ein Pol der Ordnung n von f , also $(z-u)^n f(z) = g(z)$ bei u holomorph, dann ist $\text{res}_u f = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(u)$. Insbesondere für $n = 1$: $\text{res}_u f = \lim_{z \rightarrow u} (z-u)f(z)$.

³Statt geschlossener Wege kann man auch *Zykeln* nehmen (das sind formale Summen $\tilde{w} = \sum_{i=0}^m n_i w_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, von geschlossenen Wegen w_i) und dann $\int_{\tilde{w}} = \sum_i n_i \int_{w_i}$ definieren.

⁴immer zusammen mit den jeweiligen Verbindungsstrecken

3. RESIDUIENSATZ. w sei ein geschlossener, nullhomologer Weg in U , $E \subset U \setminus S$ eine endliche Punktmenge disjunkt zu w und $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_w f d\zeta = \sum_{u \in \text{In}(w)} \text{ind}_w(u) \text{res}_u(f).$$

Die Formel wird einfacher, wenn w noch einfach geschlossen ist, weil dann $\text{ind}_w(u) = 1$ ist.

4. Ist $f \in M_U$ mit endlicher Polstellenmenge P_f und endlicher Nullstellenmenge N_f und w ein einfach geschlossener, nullhomologer Weg in U disjunkt zu $P_f \cup N_f$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n_f - p_f$$

wobei n_f und p_f die Mächtigkeit von $N_f \cap \text{In}(w)$ bzw. $P_f \cap \text{In}(w)$, jeweils mit Vielfachheiten⁵, bezeichnet.

5. f und g seien holomorph und w ein einfach geschlossener, nullhomologer Weg in U mit $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ für $z \in w$. Falls N_f und N_g endlich sind, haben f und g gleich viele Nullstellen in $\text{In}(w)$.

Das ist der Satz von Rouché.

Anwendungen auf einige uneigentliche Integrale von i.w. rationalen Funktionen:

- a) $r(z) = p(z)/q(z)$ sei eine rationale Funktion mit $\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$ (p, q sind teilerfremde Polynome in z). Gilt $q(\alpha) \neq 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} r(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt = 2\pi i \sum_{\Im(u) > 0} \text{res}_u r.$$

Dies ist der Residuensatz für den Weg $w = [-\rho, \rho] + \{\rho e^{it} : t \in [0, \pi]\}$ mit hinreichend großem ρ .⁶

- b) Falls nur $\text{grad}(q) \geq 1 + \text{grad}(p)$, so stimmt dasselbe nach Ersetzung von $r(z)$ durch $r(z)e^{iz}$. Hier ist w die Rechteckslinie $-\rho, \rho, \rho + i\rho, -\rho + i\rho$.
- c) Falls $q(\alpha) \neq 0$ nur für $\alpha > 0$, aber noch $\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$ und $z^2 \nmid q(z)$, so gilt für jedes $0 < \lambda < 1$

$$\int_0^{\infty} t^\lambda r(t) dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \lambda}} \sum_{u \neq 0} \text{res}_u (z^\lambda r(z)).$$

Der Weg ist der Halbkreis mit Radius $\frac{1}{\rho}$ von $\frac{i}{\rho}$ bis $-\frac{i}{\rho}$, die Strecke $[-\frac{i}{\rho}, \rho - \frac{i}{\rho}]$, das Kreissegment mit Radius ρ von $\rho + \frac{i}{\rho}$ bis $\rho - \frac{i}{\rho}$, die Strecke $[\rho - \frac{i}{\rho}, -\frac{i}{\rho}]$.

- d) Für rationale Funktionen $r(\cos t, \sin t)$ in $\cos t$ und $\sin t$ gilt

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt = -i \int_{K_0(1)} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} = 2\pi \sum_{|u| < 1} \text{res}_u f,$$

sofern $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ keinen Pol auf $\{|z| = 1\}$ hat.

⁵eine Nullstelle (ein Pol) n -ter Ordnung zählt also n -mal

⁶Die Gleichung \doteq gilt für jede stetige Funktion $r : [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, für die $x^\nu r(x)$ mit einem $\nu > 1$ beschränkt ist.

Konstruktion meromorpher und ganzer Funktionen mit vorgegebenen Polen (und Hauptteilen) bzw. Nullstellen

Zwei Fragen beschäftigen uns hier :

1. Wie sehen die auf U meromorphen Funktionen f aus, die an vorgegebenen Stellen Pole mit vorgegebenen Hauptteilen haben? Natürlich ist vorausgesetzt, daß die Pole diskret liegen; der Hauptteil von f beim Pol $u \in U$ der Ordnung n ist $\sum_{\nu=-n}^{-1} a_\nu(z-u)^\nu$, wenn f in einer punktierten Kreisscheibe um u in U die Laurententwicklung $f(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu(z-u)^\nu$ besitzt. Die Frage ist nur für unendlich viele Pole interessant.
2. Wie sehen die auf U holomorphen f aus, die an genau vorgegebenen Stellen verschwinden? Wieder dürfen diese Stellen sich nicht häufen.

Beide Fragen werden im folgenden nur für $U = \mathbb{C}$ behandelt ⁷. Über die Pol- bzw. Nullstellenmenge wird vorausgesetzt, daß es sich dabei um eine Folge b_ν komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = \infty$ handelt.

SATZ. Gegeben sei eine Folge b_ν komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = \infty$ sowie Polynome $p_\nu(z) \neq 0$ mit $p_\nu(0) = 0$. Dann existieren auf \mathbb{C} meromorphe Funktionen f mit $P_f = \{b_\nu\}$ und Hauptteil $p_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})$ bei b_ν , und jede solche ist von der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(p_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) - \tilde{p}_\nu(z) \right) + g(z)$$

mit geeigneten Polynomen $\tilde{p}_\nu(z)$ und ganzem $g(z)$.

Die \tilde{p}_ν werden zur Sicherstellung der Konvergenz der Reihe für f benötigt; sie entstehen durch Abschneiden der Taylorreihe von $p_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})$ bei 0 in $|z| < b_\nu$. Obiger Satz stammt von Mittag-Leffler.

Eine Anwendung ist die Partialbruchzerlegung von $\pi^2/\sin^2(\pi z)$, nämlich

$$\pi^2/\sin^2(\pi z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2},$$

denn beide Seiten haben dieselben Pole und Hauptteile.

SATZ. Gegeben sei eine Folge b_ν komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = \infty$. Es existiert dann eine ganze Funktion f mit genau den Nullstellen b_ν und jede solche hat die Form

$$f(z) = z^{m_0} e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right) e^{\frac{z}{b_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^{m_\nu}}$$

mit gewissen ganzen Zahlen m_ν und ganzem $g(z)$.

Insbesondere ist jede auf \mathbb{C} meromorphe Funktion Quotient zweier ganzer Funktionen.

Dies ist der Weierstraßsche Produktsatz ⁸. Hierbei geht ein :

⁷den allgemeinen Fall findet man z.B. in Remmert's *Funktionentheorie II*

⁸ $b_\nu = b$ ist für mehrere ν erlaubt und liefert die Vielfachheit der Nullstelle b

DEFINITION. Ein Produkt $\prod_1^\infty a_\nu$ komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn fast alle $a_\nu \neq 0$ sind und die Folge der Teilprodukte der übrigen Faktoren einen von Null verschiedenen Grenzwert hat. Das Produkt heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{\nu=n}^\infty \log a_\nu$ ab einem n absolut konvergent ist.

Dazu beachte man, daß im Falle der Konvergenz $a_\nu \rightarrow 1$, also sicher schließlich $a_\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt und deshalb $\log a_\nu$ mit dem Hauptzweig des Logarithmus gebildet werden kann. Insbesondere ist die Konvergenz von $\prod a_\nu$ äquivalent zu der von $\sum_{\nu=n}^\infty \log a_\nu$ und in diesem Fall gilt $\prod_{\nu=1}^\infty a_\nu = e^{\sum_{\nu=1}^\infty \log a_\nu}$ – vorausgesetzt, daß kein $a_\nu \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Umordnen der Faktoren ist nur in einem absolut konvergenten Produkt erlaubt (und ist dann ohne Einfluß auf den Grenzwert).

LEMMA. $\prod_{\nu=1}^\infty (1 + c_\nu)$ konvergiert absolut $\iff \sum_{\nu=1}^\infty |c_\nu|$ konvergiert.

Beispiel: Die Weierstraßsche σ - und \wp -Funktion

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sei eine \mathbb{R} -Basis von \mathbb{C} . Setze $G = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_{1,2} \in \mathbb{Z}\}$; dies definiert ein ganzzahliges Gitter auf der komplexen Ebene \mathbb{C} . Die σ -Funktion zu diesem Gitter ist eine ganze Funktion, deren Nullstellen genau die Gitterpunkte (mit Vielfachheit 1) sind.

Zur Konstruktion setze $G_n = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_{1,2} \in \mathbb{Z}, \max\{|n_1|, |n_2|\} = n\}$. Das ist eine $8n$ -elementige Teilmenge von G . Numeriere nun G so:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0, \gamma_1 = \omega_1, \gamma_2 = \omega_1 + \omega_2, \gamma_3 = \omega_2, \gamma_4 = -\omega_1 + \omega_2, \gamma_5 = -\omega_1, \gamma_6 = -\omega_1 - \omega_2, \\ \gamma_7 &= -\omega_2, \gamma_8 = \omega_1 - \omega_2; \gamma_9 = 2\omega_1, \gamma_{10} = 2\omega_1 + \omega_2, \dots \end{aligned}$$

Sicher gilt dann $|\gamma_\nu| \rightarrow \infty$ für $\nu \rightarrow \infty$ und auch, daß $\sum_{\nu=1}^\infty \left| \frac{z}{\gamma_\nu} \right|^3$ für jedes z konvergiert. Es folgt

$$\sigma(z) = z \prod_{0 \neq \gamma \in G} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2}.$$

Mit $f(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq \gamma \in G} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right)$ wird

$$\wp(z) = -f'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \gamma \in G} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right);$$

das ist die Weierstraßsche \wp -Funktion zum Gitter G . Ihre Polstellen sind die Gitterpunkte γ mit zugehörigem Hauptteil $\frac{1}{(z-\gamma)^2}$. Es gilt $\wp(z + \gamma) = \wp(z)$ für $\gamma \in G$, somit ist \wp eine doppelperiodische Funktion (mit den unabhängigen Perioden ω_1, ω_2) und insbesondere eine *elliptische* Funktion.

Fourierreihen; die Thetafunktion

Für $0 \neq c \in \mathbb{C}$ und $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ nennen wir

$$S_c(\alpha, \beta) = \left\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \Im\left(\frac{2\pi}{c}z\right) < \beta\right\}$$

das Streifengebiet zu c zwischen α und β . Es hat die Eigenschaft

$$z \in S_c(\alpha, \beta) \implies [z, z + c] \subset S_c(\alpha, \beta),$$

ist also insbesondere invariant unter der Operation $+c$. Man beachte, daß Streifengebiete aus Parallelstreifen $\{\tilde{\alpha} < \Im(z) < \tilde{\beta}\}$ durch Drehung um $\frac{|c|}{c}$ entstehen, und sicher Gebiete sind; natürlich sind \mathbb{C} und die obere Halbebene $\{\Im(z) > 0\}$ Streifengebiete.

Über $z \mapsto \frac{z}{c}$ wird $S_c(\alpha, \beta)$ biholomorph zu $S_1(\alpha, \beta)$; über $z \mapsto e^{2\pi iz}$ wird $S_1(\alpha, \beta)$ holomorph auf den Kreisring $K(\alpha, \beta) = B_0(e^{-\beta}, e^{-\alpha})$ abgebildet. Die Umkehrabbildung $u \mapsto \frac{1}{2\pi i} \log u$ existiert auf $K^-(\alpha, \beta) := K(\alpha, \beta) \setminus \mathbb{R}_{<0}$.

Ist jetzt g eine holomorphe Funktion auf $K(\alpha, \beta)$, so wird $f(z) = g(e^{2\pi iz})$ eine holomorphe Funktion auf $S_1(\alpha, \beta)$ mit der Periode 1, i.e., $f(z+1) = f(z)$.

LEMMA. Jedes auf $S_1(\alpha, \beta)$ holomorphe f mit Periode 1 ist genau ein $g(e^{2\pi iz})$.

Beobachtung: Fourierreihen $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{\frac{2\pi i}{c} \nu z}$, die in $S_c(\alpha, \beta)$ konvergieren⁹, sind holomorph in $S_c(\alpha, \beta)$ und haben Periode c .

SATZ. Ist f in $S_c(\alpha, \beta)$ holomorph mit Periode c , so ist $f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{\frac{2\pi i}{c} \nu z}$ eine Fourierreihe und es gilt $a_{\nu} = \frac{1}{c} \int_{[a, a+c]} f(\zeta) e^{-\frac{2\pi i}{c} \nu \zeta} d\zeta$ für jedes $a \in S_c(\alpha, \beta)$.

Einfachste Beispiele sind die Fourierentwicklungen der 2π -periodischen Winkelfunktionen $\cos z = \frac{1}{2} e^{-iz} + \frac{1}{2} e^{iz}$ und $\sin z = -\frac{1}{2i} e^{-iz} + \frac{1}{2i} e^{iz}$ in \mathbb{C} oder der auf der oberen Halbebene holomorphen Funktion $\frac{1}{\cos z} = 2e^{iz} \frac{1}{1+e^{2iz}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2e^{i\nu} e^{(2\nu+1)iz}$.

DEFINITION. $\theta(z, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 \pi \tau} e^{2\pi i \nu z}$, $(z, \tau) \in \mathbb{C}^2$, $\Re(\tau) > 0$, ist die Thetafunktion.

Offenbar gilt $\theta(z+1, \tau) = \theta(z, \tau)$ und $\theta(z+i\tau, \tau) = e^{\pi \tau} e^{-2\pi iz} \theta(z, \tau)$.

SATZ. Für festes τ ist $z \mapsto e^{-z^2 \pi \tau} \theta(i\tau z, \tau)$ eine ganze Funktion mit Periode 1 und Fourierentwicklung $\frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 \pi}{\tau}} e^{2\pi i \nu z}$. Insbesondere gilt

$$\theta\left(z, \frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau} e^{-z^2 \pi \tau} \theta(i\tau z, \tau).$$

Die komplexe Gammafunktion; Riemanns Vermutung

Setze $G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}$; $G(z)$ ist also "die" ganze Funktion mit den Nullstellen $-1 \leq \nu \in \mathbb{Z}$ und ergo $G(-z)$ die mit den Nullstellen $1 \leq \nu \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

und des weiteren $G(z-1) = zG(z)e^{g(z)}$, da $G(z-1)$ die Nullstellen $0 \leq \nu \in \mathbb{Z}$ hat. Für die ganze Funktion $g(z)$ findet man (über die logarithmische Ableitung der letzten Gleichung)

$$g(z) = \gamma = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu} - \log \nu\right) \approx 0.57722;$$

das ist Eulers Konstante.

Setze $\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z G(z)}$. Dann gilt

⁹d.h. $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_{\nu} e^{\frac{2\pi i}{c} \nu z}|_U < \infty$ für jedes Kompaktum U in $S_c(\alpha, \beta)$

1. $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$,
2. $\Gamma(z)$ ist meromorph mit den Polen $0 \geq \nu \in \mathbb{Z}$ und hat keine Nullstellen,
3. $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Aus der Analysis kennen wir für Γ die Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} \frac{dt}{t}$$

für reelle $s > 0$. Substituiere $\pi\nu^2 t$ für t und erhalte $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{\nu^s} = \int_0^\infty e^{-\pi\nu^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} \frac{dt}{t}$ und summiere jetzt über ν

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{1}{2} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} \frac{dt}{t} =: \Lambda(s)$$

mit $\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^s}$ (die Riemannsches Zetafunktion) und $\theta(t) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^\infty e^{-\pi\nu^2 t}$ (die Thetafunktion). Wenn wir das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{2} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} \frac{dt}{t}$ auch für $s \in \mathbb{C}$ erklären können (bisher ist $\Re(s) > 1$ wegen der Konvergenz von $\zeta(s)$), so haben wir damit auch $\zeta(s)$ auf ganz \mathbb{C} erklärt. Die Schwierigkeit liegt nur bei $t = 0$.

Spalte $\int_0^\infty \frac{1}{2} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1} \frac{dt}{t}$ in $\int_0^1 + \int_1^\infty$ auf, substituiere im ersten Integral $\frac{1}{t}$ für t und verwende

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} \theta(t);$$

wir erhalten

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \frac{1}{2} (\theta(t) - 1) (t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dt}{t}.$$

Hier muß nur $s \neq 0, 1$ sein (das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{2} (\theta(t) - 1) (t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dt}{t}$ existiert für alle $s \in \mathbb{C}$). Damit ist nun $\zeta(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ definiert und meromorph mit dem einfachen Pol $s = 1$ mit Residuum 1 (weil $\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$); die Singularität $s = 0$ von $\zeta(s)$ ist hebbar, weil $s = 0$ auch ein Pol von $\Gamma(s)$ ist ($\zeta(0) = -\frac{1}{2}$). Wir sehen ferner, daß $\zeta(s)$ in der Halbebene $\Re(s) < 0$ nur die Nullstellen -2ν , $\nu \in \mathbb{N}$ hat (die Pole von Γ sind die Nullstellen von $\frac{1}{\Gamma}$); alle übrigen liegen im Streifen $0 < \Re(s) < 1$ wegen der Funktionalgleichung

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Man bemerke, daß $\zeta(s)$, für $s \in \mathbb{C}$, eindeutig durch $\zeta(s)$ für $s \geq 1$ und durch $\zeta(-2n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta(0)$ bestimmt ist (Identitätssatz für $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 1}$, $B_{-2n}(2)$, $B_0(1)$).

Die berühmte Riemannsches Vermutung¹⁰ betrifft die Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $0 < \Re(s) < 1$: sie alle sollen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Riemann studierte $\zeta(s)$, um scharfe Aussagen über die Primzahlverteilung zu erhalten (*wieviele Primzahlen gibt es zwischen 1 und $x \in \mathbb{N}$?*¹¹); man beachte, daß die eindeutige Zerlegung einer natürlichen Zahl n in ihre Primfaktoren die Gleichheit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

¹⁰ein Literaturvorschlag hierzu: H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974

¹¹ $\pi(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1$

erzwingt, wobei das Produkt über alle Primzahlen p läuft (benutze auch die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-s\nu} = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$).

Der Riemannsche Abbildungssatz

Die erweiterte komplexe Ebene $\bar{\mathbb{C}}$ entsteht aus \mathbb{C} durch Hinzunahme eines Punktes ∞ (Kompaktifizierung). Offene ρ -Umgebungen dieses (abgeschlossenen) Punktes sind, per definitionem, die Mengen $\{z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| > \rho (> 0)\}$. Man veranschauliche sich $\bar{\mathbb{C}}$ als die Oberfläche der Kugel um 0 vom Radius 1 im \mathbb{R}^3 mit $\infty = (0, 0, 1)$ (Nordpol); also

$$\bar{\mathbb{C}} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Die stereographische Projektion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1-x_3}$ liefert nämlich eine eindeutige stetige Abbildung von $\bar{\mathbb{C}} \setminus (0, 0, 1)$ auf die Ebene $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2)\}$. Man bemerke, daß damit jede Gerade in \mathbb{C} durch ∞ geht (Kreise auf der Kugeloberfläche korrespondieren zu Kreisen oder Geraden in der x_1, x_2 -Ebene).

DEFINITION. Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls sein Komplement in $\bar{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist.

Z.B. sind \mathbb{C} , Kreisscheiben und Parallelstreifen einfach zusammenhängend.

LEMMA. 1. U einfach zusammenhängend $\iff \text{ind}_w(z) = 0$ für jeden geschlossenen Weg w in U und jedes $z \notin U$.

2. U einfach zusammenhängend $\implies \int_w f d\zeta = 0$ für jedes auf U holomorphe f und jeden geschlossenen Weg w in U .

‘Geschlossen’ ist also äquivalent mit ‘nullhomolog’ in einfach zusammenhängenden Gebieten.

RIEMANNS ABBILDUNGSSATZ. Ist $U \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so ist U biholomorph zu $E = \{z : |z| < 1\}$.

Bemerkungen :

1. Zufolge von Liouvilles Satz ist $U \neq \mathbb{C}$ eine notwendige Voraussetzung. Allerdings sind $z \mapsto e = \frac{z}{1+|z|}$, $e \mapsto \frac{e}{1-|e|}$ zueinander inverse, stetige (aber nicht holomorphe) Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow E$ bzw. $E \rightarrow \mathbb{C}$.
2. Aus ‘bijektiv’ und ‘holomorph’ folgt ‘biholomorph’.
3. Zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes zeigen wir genauer :

Zu $u_0 \in U$ existiert genau ein bijektives, holomorphes $f : U \rightarrow E$ mit $f(u_0) = 0$ und $f'(u_0) > 0$.

Die Eindeutigkeit des f folgt dabei aus dem Schwarzschen Lemma

$g : E \rightarrow E$ sei holomorph und $g(0) = 0$. Dann ist $|g'(0)| \leq 1$ und $|g(z)| \leq |z|$ für $z \in E$. Gilt einmal das Gleichheitszeichen, so ist $g(z) = e^{i\varphi}$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ (also g die Drehung um φ).

Das seinerseits ist eine Konsequenz der Taylorreihenentwicklung und des Maximumprinzips “holomorphe Funktionen auf einem Gebiet nehmen ihr Maximum auf dem Rand an (und nur da, solange sie nicht konstant sind)”; vgl. Aufgabe 6.

Der aktuelle Beweis von 3. benutzt die Existenz einer Stammfunktion einer auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet U holomorphen Funktion, sowie

1. $A \stackrel{\text{def}}{=} \{g : U \rightarrow \overline{E}, g \text{ holomorph und injektiv, } g(u_0) = 0, g'(u_0) > 0\} \neq \emptyset,$
2. jede Folge von Funktionen aus A enthält eine konvergente Teilfolge mit holomorphem Grenzwert, der entweder $= 0$ oder ganz ohne Nullstellen ist,
3. $s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{g \in A} g'(u_0) < \infty,$ genauer: es gibt eine (gleichmäßig auf kompakten Mengen) konvergente Folge $g_n \in A$ mit holomorpher Grenzfunktion $f \in A$ und $f'(u_0) = s,$
4. dieses f ist bijektiv.

Analytische Fortsetzung in einfach zusammenhängenden Gebieten

U sei ein Gebiet in $\mathbb{C}, u_0 \in U$ und f_0 eine in einer kleinen Umgebung von u_0 in U holomorphe Funktion, etwa in $B_{u_0}(\rho_0) \subset U.$ Ist $z \in U$ irgendein Punkt und w ein u_0 mit z verbindender Weg in $U,$ so sagt man, daß f_0 analytisch nach z entlang w fortgesetzt werden kann, falls es

Punkte $u_i, 0 \leq i \leq n,$ auf w mit $u_n = z$ sowie Kreisumgebungen $B_{u_i}(\rho_i) \subset U$ mit $u_{j+1} \in B_{u_j}(\rho_j)$ für $0 \leq j \leq n-1$ und außerdem auf $B_{u_i}(\rho_i)$ holomorphe Funktionen f_i mit $f_j = f_{j+1}$ auf $B_{u_j}(\rho_j) \cap B_{u_{j+1}}(\rho_{j+1})$ gibt.

Wegen des Identitätssatzes ist $f_n(z)$ eindeutig durch f_0 und w bestimmt. Ändert man aber $w,$ so erhält man möglicherweise eine andere Fortsetzung von f_0 in $z,$ wie der Logarithmus für $U = B_0(1)$ zeigt. Nicht so allerdings, wenn U einfach zusammenhängend ist, denn dann gilt der

MONODROMIESATZ. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $u_0 \in U$ und f_0 in einer kleinen Umgebung von u_0 in U definiert und holomorph. Wenn sich dann f_0 längs jeden in U verlaufenden Weges analytisch fortsetzen läßt, so existiert eine auf ganz U definierte holomorphe Funktion $f,$ die mit f_0 übereinstimmt.*

Ein Exkurs in Modulformen

DEFINITION. $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 1 \right\}$ ist die Modulgruppe. Sie wirkt auf der oberen Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ vermöge $Az = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{\alpha_3 z + \alpha_4}.$

Man überprüft, daß tatsächlich $Az \in H$ und des weiteren, daß $(AB)z = A(Bz)$ und $[Az = Bz (\forall z \in H) \implies A = \pm B]$ für $A, B \in \Gamma$ gilt.

DEFINITION. *Eine meromorphe Modulform f vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ ist eine auf H definierte meromorphe Funktion (mit Werten in $\overline{\mathbb{C}}$), die folgende Eigenschaften hat:*

1. $f(Az) = (\alpha_3 z + \alpha_4)^k f(z)$ für $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in \Gamma,$
2. f ist ohne Pole für $\Im(z) > \rho$ für ein $\rho = \rho(f) > 0,$
3. f ist holomorph oder hat einen Pol bei $i\infty.$

Beobachtungen:

1. f ist periodisch mit Periode 1, denn mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird $f(Az) = f(z + 1)$. Insbesondere besitzt also f eine Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$ mit $q = e^{2\pi iz}$. Als Funktion in q ist dann f meromorph im punktierten Einheitskreis $\{0 \neq z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$; die dritte Bedingung soll nun bedeuten, daß $(q - 1)^s f$ (für einen ganzzahligen Exponenten $s \geq 0$) hier holomorph nach 0 fortsetzbar sei – damit sind obige Koeffizienten $a_n = 0$ für fast alle negativen n .
2. k sollte wegen $f(z) = f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z\right) = (-1)^k f(z)$ gerade sein.
3. Ist $f \neq 0$, so hat f modulo Γ nur endlich viele Pole und Nullstellen. Denn H entsteht aus einem Fundamentalbereich F , i.e. $H = \bigcup_{A \in \Gamma} A \cdot F$, mit kompaktem $F \cap \{\Im(z) \leq \rho(f)\}$ (vgl. das LEMMA weiter unten); man beachte noch, daß $f(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^k} f(z)$ jede Nullstelle z mit großem Imaginärteil in die neue Nullstelle $-\frac{1}{z}$ mit kleinem Imaginärteil verschiebt.
4. Ist 0 eine hebbare Singularität von f (als Funktion von q) und gilt $f(0) = 0$, so heiße f eine Spitzenform.

LEMMA. Zu jedem $z \in H$ existiert ein $A \in \Gamma$ mit $Az \in F \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{C} : |u| \geq 1, |\Re(u)| \leq \frac{1}{2}\}$. Nur die Punkte $u, u + 1$ für $\Re(u) = -\frac{1}{2}$ sowie $u, \frac{1}{u}$ für $|u| = 1$ sind unter Γ konjugiert (i.e., werden von einem $A \in \Gamma$ ineinander übergeführt).

Im Beweis verwendet man am besten, daß die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Gruppe Γ erzeugen. – Man beachte, daß $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ der “linke untere Eckpunkt” von F ist. Es sei \mathfrak{G} die Menge der Gitter $\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ auf \mathbb{C} (also $w_1, 0 \neq w_2 \in \mathbb{C}$ und $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$). Über

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \\ \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 \end{pmatrix}$$

wirkt Γ auf der Menge $P \stackrel{\text{def}}{=} \{(w_1, w_2) : \frac{w_1}{w_2} \in H\}$. Wegen $\frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{\alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot \frac{w_1}{w_2}$ sind die Gitter in \mathfrak{G} durch $[P \text{ modulo } \Gamma]$ parametrisiert (denn $\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \mathbb{Z}w_2 + \mathbb{Z}w_1$ und $\Im(\frac{w_1}{w_2}) \cdot \Im(\frac{w_2}{w_1}) < 0$).

Auf \mathfrak{G} und P wirkt noch \mathbb{C}^\times über

$$\begin{aligned} G = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 &\mapsto aG = \mathbb{Z}aw_1 + \mathbb{Z}aw_2 \\ (w_1, w_2) &\mapsto (aw_1, aw_2) \end{aligned}$$

(für $a \in \mathbb{C}^\times$), woraus folgt, daß

$$\mathfrak{G} \bmod \mathbb{C}^\times \quad \text{und} \quad H \bmod \Gamma$$

übereinstimmen.

Sei nun $G \in \mathfrak{G}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{0 \neq g \in G} \frac{1}{|g|^\rho}$ für jedes $\rho > 2$. Wir wählen $\rho = 2k \in 2\mathbb{N}$ und setzen $g_k(G) = \sum_{0 \neq g \in G} \frac{1}{g^{2k}}$. Diese Reihe konvergiert also absolut und hat Gewicht $-2k$: $g_k(aG) = a^{-2k} g_k(G)$. Ist nun G parametrisiert durch $(w_1, w_2) \in P$, also

$$g_k(G) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^{2k}}$$

(der Strich an \sum bedeute, daß $(m, n) = (0, 0)$ nicht in der Summation vorkomme), so folgt $g_k(w_2^{-1}G) = w_2^{-2k} \sum'_{m,n} \frac{1}{(m\frac{w_1}{w_2} + n)^{2k}}$.

Auf diese Weise (i.e., G durchlaufe \mathfrak{G}) erhalten wir die *Eisensteinreihe* $G_k(z) = \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$ für $z \in H$, die $G_k(z) = (\alpha_3 z + \alpha_4)^{-2k} G_k(\frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{\alpha_3 z + \alpha_4})$ für $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in \Gamma$ erfüllt. Es gilt

G_k ist eine holomorphe Modulform vom Gewicht $2k$ und $G_k(i\infty) = 2\zeta(2k)$

(ζ ist die ζ -Funktion).

DEFINITION. $\Delta = (60 G_2)^3 - 27(140 G_3)^2$ ist die sogenannte *Diskriminante*, $j = 1728 G_2^3/\Delta$ die sogenannte *absolute Invariante*.

Die Diskriminante ist eine (holomorphe) Spitzenform vom Gewicht 12, nullstellenfrei in H , mit der einfachen Nullstelle $i\infty$; die absolute Invariante ist eine auf H holomorphe Modulform vom Gewicht 0 mit einem einfachen Pol bei $i\infty$ (die Bezeichnungen entstammen der Theorie der elliptischen Funktionen). Die behaupteten Eigenschaften sind eine (von vielen) Konsequenzen aus dem folgenden Satz, in dem $v_z(f) = n$ oder $= -n$ die Vielfachheit der Nullstelle bzw. Polstelle z von f bedeutet.

SATZ. Für meromorphe Modulformen $f \neq 0$ vom Gewicht $2k$ gilt

$$v_{i\infty}(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_{\zeta_3}(f) + \sum_{\substack{z \in H \text{ mod } \Gamma \\ z \neq i, \zeta_3}} v_z(f) = \frac{1}{6}.$$

Der wiederum resultiert aus der Residuenformel $\frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{f'}{f} = n_f - p_f$, wobei w den Rand von F (abgeschnitten bei $\Im(z) = \rho$, ρ groß) bezeichnet.

Folgerungen: M_k , bzw. M_k^0 , sei die Notation für den \mathbb{C} -Vektorraum aller holomorphen Modulformen (Spitzenformen) vom Gewicht $2k$ (alle $v_z(f)$ sind also ≥ 0). Es gilt

1. $M_k = 0$ für $k \leq 1$
2. $M_k \neq 0 \implies \text{codim } M_k^0 = 1$
3. $\dim M_k = 1$ für $k = 0, 2, 3, 4, 5$ und $1, G_2, G_3, G_4, G_5$ sind jeweilige Basiselemente.
4. Multiplikation mit Δ induziert einen Isomorphismus von M_{k-6} mit M_k^0 .
 $\{G_2^m \cdot G_3^n : m, n \geq 0, 2m + 3n = k\}$ ist eine Basis für M_k ($k \geq 0$).
5. $z \in H \text{ mod } \Gamma \leftrightarrow j(z) \in \mathbb{C}$ ist eine Bijektion.
6. Die meromorphen Modulformen vom Gewicht 0 sind genau die rationalen Funktionen in j .