Professor Dr. Jürgen Ritter
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Institut für Mathematik · Universität Augsburg

Vorlesung Analysis 2 · Sommersemester 2003

[Fortsetzung des Skripts zur Vorlesung Analysis 1 aus dem WS 2002/03]

Vorbemerkung

$\boxed{\text{A1}}$ verweist auf das Skript zur Vorlesung Analysis 1 · Wintersemester 2002/03.

Zu §§1–5 empfehle ich besonders das Buch von Dieudonné, zu §§6,7 Forsters Analysis 3 sowie Bröckers Analysis 2, zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen Forsters Analysis 2. Darüberhinaus möchte ich auch weiterhin auf die übrigen in $\boxed{\text{A1}}$ genannten Monographien hinweisen.

1. Normierte Räume, Banachräume

V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von nicht notwendig endlicher Dimension. V heißt normiert, falls es eine Funktion $\parallel\ \parallel :\ V \to \mathbb{R}$ gibt, die folgendes erfüllt:

$$\parallel v \parallel \geq 0\ (\forall v \in V)\ ,\ \parallel v \parallel = 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

$$\parallel \lambda v \parallel = |\lambda| \parallel v \parallel\ \ (\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall v \in V)$$

$$\parallel v_1 + v_2 \parallel \leq \parallel v_1 \parallel + \parallel v_2 \parallel\ \ (\forall v_1, v_2 \in V)\ .$$

Eine solche Funktion heißt Norm.

Bemerkung 1. $d(v_1, v_2) = \parallel v_1 - v_2 \parallel$ ist die zur Norm $\parallel\ \parallel$ gehörige Distanzfunktion. Sie ist translationsinvariant und genügt den üblichen Distanzregeln.

Bemerkung 2. Der normierte $\mathbb{R}$-Raum $V, \parallel\ \parallel$ trägt eine natürliche Topologie. In V sind nämlich die offenen Teilmengen diejenigen $O \subset V$, für die entweder

$O = \emptyset$ oder

O mit jedem Punkt $v \in O$ eine geeignete ganze Umgebung

$$U_\delta(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1 \in V\ :\ \parallel v - v_1 \parallel <\ \delta\}$$

enthält

(vgl. $\boxed{\text{A1}}$, S. 8). Wie immer ist δ dabei eine positive reelle Zahl, i.e. $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Analog zum Fall $[\ \mathbb{R} = V\ ,\ \parallel\ \parallel = |\ |\ ]$ können wir daher von Konvergenz von Folgen in V und auch von Cauchyfolgen aus V sprechen.

Definition. *Der normierte $\mathbb{R}$-Raum B heißt Banachraum, wenn er vollständig ist, in ihm also jede Cauchyfolge konvergiert.*

Beispiele :

1) $B=\mathbb{R}^n$, $\parallel (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^t \parallel \overset{\text{def}}{=} \max{}_{1\le i\le n}|\alpha_i|$ ist ein Banachraum [1];

   $V=\{f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\ ,\ f \text{ stetig}\}$ mit $\parallel f \parallel = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ ist ein normierter, nichtvollständiger $\mathbb{R}$-Raum.

2) Für normierte $\mathbb{R}$-Räume V,W definiere $C(V,W)=\{\ f:V\to W,\ f$ stetig und linear$\}$. Dabei heißt f stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge von W offen in V ist. Gilt $\dim V$, $\dim W<\infty$, so ist eine lineare Abbildung f automatisch stetig.

   $C(V,W)$ ist ein $\mathbb{R}$-Raum mit Norm $\parallel f \parallel = \sup_{\parallel v\parallel\le 1} \parallel f(v) \parallel$. Ist W komplett (also ein Banachraum), so auch $C(V,W)$.

Beobachtungen :

(1) Die Abbildungen

$$V\times V\to V\ ,\ (v_1,v_2)\mapsto v_1+v_2\ ;\ \mathbb{R}\times V\to V\ ,\ (\lambda,v)\mapsto \lambda v$$

sind gleichmäßig stetig beziehungsweise stetig, wenn V ein normierter $\mathbb{R}$-Raum ist. Also: $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $[\parallel v_1-\tilde v_1\parallel<\delta\ \&\ \parallel v_2-\tilde v_2\parallel<\delta \Longrightarrow \parallel v_1+v_2-(\tilde v_1+\tilde v_2)\parallel<\varepsilon\,]$, bzw. $|\lambda-\tilde\lambda|<\delta=\delta(\varepsilon,\lambda,v)\ \&\ \parallel v-\tilde v\parallel<\delta\Longrightarrow\parallel\lambda v-\tilde\lambda\tilde v\parallel<\varepsilon$.

(2) Die in $\boxed{\text{A1}}$ ab S. 7 beschriebenen Eigenschaften für $\mathbb{R}$ mit Bezug auf Häufungspunkte, Folgen und Reihen gelten m.m. für jeden Banachraum B. So heißt etwa eine Reihe $\sum v_n$ absolut konvergent, falls $\sum \parallel v_n \parallel$ konvergiert, und eine Menge $M\subset B$ beschränkt, falls $\parallel m\parallel<\gamma$ für alle $m\in M$ und ein $\gamma\in\mathbb{R}_{>0}$ gilt [2].

(3) $f:V_1\times\ldots\times V_n\to W$ sei eine multilineare Abbildung (d.h. $\mathbb{R}$-linear in jedem Argument); $V_1,\ldots,V_n,W$ sind hier normierte $\mathbb{R}$-Räume. Dann ist f stetig, genau wenn ein $\alpha\in\mathbb{R}_{>o}$ mit

$$\parallel f(v_1,\ldots,v_n)\parallel\ \le\ \alpha\parallel v_1\parallel\cdot\ldots\cdot\parallel v_n\parallel$$

für alle $v_i\in V_i$ existiert. Insbesondere,

> ist $f:B_1\to B_2$ eine lineare, stetige Abbildung zwischen Banachräumen B_1,B_2, so gilt für die Reihe $\sum v_n$ mit $v_n\in B_1$:
>
> $\sum v_n$ (absolut) konvergent $\Longrightarrow \sum f(v_n)$ (absolut) konvergent und $\sum f(v_n)=f(\sum v_n)$.

(4) Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien zwei Normen $\parallel\ \parallel_1,\parallel\ \parallel_2$ gegeben. Diese heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie auf V erzeugen, d.h. "$\parallel\ \parallel_1$-offen = $\parallel\ \parallel_2$-offen". Gleichbedeutend ist:

$$\exists\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}_{>0}\ :\ \alpha\parallel v\parallel_1\ \le\ \parallel v\parallel_2\ \le\ \beta\parallel v\parallel_1\quad(\forall\ v\in V).$$

[1] Ich bevorzuge Spaltenvektoren – wegen des einheitlicheren Schriftbildes schreibe ich sie aber als transponierte Zeilenvektoren.

[2] Beachte aber, daß Aussagen hinsichtlich von Größenvergleichen, wie z.B. sup und inf, in B kein Äquivalent haben. Insbesondere lassen sich Aussagen wie $[\,M\subset\mathbb{R}, M$ beschränkt $\Longrightarrow \exists\alpha<\beta\in\mathbb{R}$ mit $M\subset[\alpha,\beta]\,]$ nicht unbedingt verallgemeinern, wenn $\dim_{\mathbb{R}} B=\infty$. Vor jeder Verallgemeinerung eines Satzes aus der eindimensionalen reellen Analysis auf V überprüfe man deshalb, ob Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ in den Beweis eingingen.

(5) Ist V normiert mit endlicher $\mathbb{R}$-Basis $e_1, \ldots, e_n$, so ist die natürliche Abbildung $\mathbb{R}^n \to V\,,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ein bistetiger Isomorphismus [3]. Insbesondere ist V komplett.

(6) *Ist V normiert und lokal-kompakt, so ist* $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ (Satz von Riesz).

Lokal-kompakt heißt: jedes $v \in V$ besitzt eine kompakte Umgebung U, also eine kompakte Teilmenge von V mit $U \supset U_\delta(v)$ für ein geeignetes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Hierbei bedeutet *kompakt*, daß jede Überdeckung von U durch offene Mengen in V eine endliche Teilüberdeckung enthält (vgl. $\boxed{\text{A1}}$, S. 8). Zwei Beobachtungen dazu: stetige Bilder von Kompakta sind kompakt, *kompakt* impliziert *abgeschlossen* und *beschränkt*.

2. Ableitungen

B_1, B_2 seien $\mathbb{R}$-Banachräume; $O \subset B_1$ sei offen und $f, g : O \to B_2$ Abbildungen. Diese heißen tangential bei $x_0 \in O$, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\| f(x) - g(x) \|}{\| x - x_0 \|} = 0\,.$$

Bei festem f kann es höchstens ein solches g der Form $g(x) = f(x_0) + \varphi(x - x_0)$ mit einer linearen Abbildung $\varphi : B_1 \to B_2$ geben.

Definition. *$f : O \to B_2$ heißt differenzierbar bei $x_0 \in O$, falls es eine lineare Abbildung $\varphi : B_1 \to B_2$ gibt, so daß $g(x) = f(x_0) + \varphi(x - x_0)$ tangential zu f bei x_0 ist. Schreibweise: $\varphi = f'(x_0)$.*

Beobachtungen:

(D1) Ist f stetig und differenzierbar bei x_0, so ist $f'(x_0)$ eine stetige, lineare Abbildung (also $\in C(B_1, B_2)$).

Bemerkung. Haben B_1 und B_2 endliche Dimension, so ist beidesmal *stetig* eine Konsequenz (nämlich aus *differenzierbar* bzw. *linear*).

(D2) Konstante Funktionen f sind differenzierbar und $f'(x) = 0$.

(D3) Stetige, lineare Abbildungen f sind differenzierbar und $f'(x) = f$.

(D4) B_1, B_2, B seien drei Banachräume und $f : B_1 \times B_2 \to B$ stetig und bilinear; setze $f(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$. Es gilt: f ist überall differenzierbar und hat die Ableitung $(s, t) \mapsto \langle x_1, t \rangle + \langle s, x_2 \rangle$ im Punkt (x_1, x_2).

(D5) *Kettenregel:* $h'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$. Hier sind $f : O_1 \to B_2$ (O_1 offene Umgebung von x_0 in B_1) und $g : O_2 \to B_3$ (O_2 offene Umgebung von $f(x_0)$ in B_2) stetig auf O_1 bzw. O_2, und f ist differenzierbar in x_0, g in $f(x_0)$. Dann ist $h = g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt obige Formel.

(D6) Es seien f und g bei x_0 differenzierbare Funktionen von B_1 nach B_2; $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda f + g$ bei x_0 differenzierbar und

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g'(x_0)\ .$$

[3] Eine umkehrbar eindeutige Abbildung f heißt bistetig, falls f und f^{-1} stetig sind.

(D7) $f : O_1 \to O_2$ sei eine umkehrbar eindeutige, bistetige Abbildung der offenen Teilmenge $O_1 \subset B_1$ auf die offene Teilmenge $O_2 \subset B_2$. Des weiteren sei f differenzierbar in $x_0 \in O_1$ und $f'(x_0)$ umkehrbar eindeutig und bistetig. Dann ist $g = f^{-1}$ differenzierbar bei $y_0 = f(x_0)$ und $g'(y_0) = (f'(x_0)^{-1}$.

Definition. *Das Intervall $[v_1, v_2]$ zwischen den Punkten v_1, v_2 des normierten $\mathbb{R}$-Raumes V ist die Menge $\{v_1 + \zeta(v_2 - v_1) : 0 \le \zeta \le 1\}$.*

Mittelwertsatz. *Die offene Menge O im Banachraum B_1 enthalte das Intervall $[x_0, x_0+t]$ und f sei eine stetige Abbildung $O \to B_2$ mit Werten im Banachraum B_2. Dann gilt*

$$\| f(x_0 + t) - f(x_0) \| \le \| t \| \sup_{0\le\zeta\le 1} \| f'(x_0 + \zeta t) \| ,$$

falls f differenzierbar auf $[x_0, x_0 + t]$ ist.

Folgerungen (B_1, B_2 sind stets $\mathbb{R}$-Banachräume; $O \subset B_1$ ist offen):

a) O sei zusammenhängend, d.h. $A = \emptyset$ oder $= O$ für jede offen und zugleich abgeschlossene Teilmenge $A \subset O$ [4]. Ist $f : O \to B_2$ stetig mit verschwindender Ableitung, so ist f konstant.

b) $f_n : O \to B_2$ sei eine Folge differenzierbarer Abbildungen auf der offenen, zusammenhängenden Menge $O \subset B_1$ mit

$$\exists x_0 \in O \text{ mit } (f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } B_2$$
$$\forall\, x \in O\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0} \ :\ U_\delta(x) \subset O \text{ und } f_n'(x) \text{ konvergiert gleichmäßig in } U_\delta(x).$$

Dann konvergiert f_n gleichmäßig in $U_\delta(x)$ für jedes $x \in O$ und die Grenzfunktion hat die Ableitung $\lim f_n'(x)$.

3. Integrale, Stammfunktionen

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf Funktionen $f : [a, b] \to B$, wo $[a, b]$ ein reelles Intervall und B ein Banachraum ist.

$F : [a, b] \to B$ heißt Stammfunktion von f, falls F stetig, differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ ist. Beachte: $F'(x) \in C(\mathbb{R}, B) = B$ für jedes x; also ist auch F' eine Abbildung $[a, b] \to B$.

Der Mittelwertsatz impliziert, daß zwei Stammfunktionen von f sich nur um eine Konstante unterscheiden. Recht analog zu $\boxed{\text{A1}}$, S. 23, 24, zeigt man, daß stetige Funktionen f Stammfunktionen besitzen, nämlich $\int f(x)dx$. Des weiteren:

- $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$, falls f stetig und φ eine streng monotone, differenzierbare reellwertige Funktion $[\alpha, \beta] \twoheadrightarrow [a, b]$ ist.

[4] Erinnerung: $A \subset O$ heißt offen (abgeschlossen) in O, falls $A = O \cap U$ mit einer offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge $U \subset O$ gilt.
$(0, 1)$ ist zusammenhängend in $\mathbb{R}$

- $\int_a^b f \cdot g' \, dx = (f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)) - \int_a^b f' \cdot g \, dx$
  Hier sind f und g stetige und differenzierbare Funktionen $[a,b] \to B_1$, $[a,b] \to B_2$, und $(b_1, b_2) \mapsto b_1 \cdot b_2$ ist eine stetige bilineare Funktion $B_1 \times B_2 \to B$.
- $\int_a^b \varphi(f(x))dx = \varphi(\int_a^b f(x)dx)$, falls $f : [a,b] \to B$ stetig und $\varphi : B \to \tilde{B}$ stetig und linear ist.
- $\| \int_a^b f(x)dx \| \le \int_a^b \| f(x) \| \, dx \le (b-a) \sup_{x \in [a,b]} \| f(x) \|$
- $f_n(x)$ konvergiere gleichmäßig gegen f auf $[a,b]$. Dann gilt: $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Entsprechend: $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, falls $\sum f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert.

4. Partielle Ableitungen

Gegeben ist die auf $O \subset B$ differenzierbare Abbildung $O \xrightarrow{f} \tilde{B}$ (O offen; B und $\tilde{B}$ Banachräume). B sei seinerseits das Produkt $B = B_1 \times B_2$ von zwei Banachräumen. Jedes $(b_1, b_2) \in O$ liefert Abbildungen

$$x_1 \mapsto f(x_1, b_2) \ , \ x_2 \mapsto f(b_1, x_2)$$

von offenen Teilmengen $O_1 \subset B_1$ bzw. $O_2 \subset B_2$ nach $\tilde{B}$ (die O_i sind die jeweiligen Projektionen von O in B_i).

Definition. *Ist (b_1, b_2) vorgegeben, so heißt f bei (b_1, b_2) differenzierbar nach der ersten [zweiten] Variablen, falls $x_1 \mapsto f(x_1, b_2)$ $[x_2 \mapsto f(b_1, x_2)]$ differenzierbar bei $x_1 = b_1$ $[x_2 = b_1]$ ist. Die zugehörigen Ableitungen werden mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1, b_2)$ $[\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, b_2)]$ bezeichnet.*

Satz. *f sei stetig auf O. Dann gilt: f stetig differenzierbar auf $O \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existieren überall und sind stetig. In diesem Fall ist*

$$f'(x_1, x_2) \cdot (t_1, t_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot t_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \cdot t_2, \ (t_1, t_2) \in O \ .$$

Beispiele: 1. $B = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. Dann ist die Ableitung $f'((x_1, \ldots, x_n)^t)$ die $1 \times n$-Zeile $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}((x_1, \ldots, x_n)^t)\right)_{1 \le i \le n}$. Ist noch $\tilde{B} = \mathbb{R}^m$, so können wir $f = (f_1, \ldots, f_m)^t$ mit Skalarfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben. Jetzt ist f genau dann stetig differenzierbar, falls jedes f_i stetig differenzierbar ist; ein f_i wiederum ist genau dann stetig differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existieren und stetig sind [5]. Es gilt: $f' = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$. Die Matrix $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ heißt die Jacobische (Matrix) zu f. Die Jacobischen Matrizen verhalten sich für zusammengesetzte stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ multiplikativ. [6]

[5] Für $B = \mathbb{R}^n, \tilde{B} = \mathbb{R}$ lies die Gleichnug $f'(x_0)(\xi_1, \ldots, \xi_n)^t = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))(\xi_1, \ldots, \xi_n)^t = \xi_{n+1} \in \mathbb{R}$ als die Gleichung einer Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ (vorausgesetzt ist, daß $f'(x_0) \neq 0$). Wird die in den Punkkt $(x_0, f(x_0))^t$ verschoben, so entsteht die *Tangentialebene* an die *Fläche* $\{(x, f(x))^t\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ im Punkt $(x_0, f(x_0))^t$. Man vergegenwärtige sich dies anschaulich für $n = 1, 2$.

[6] Ist $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in O$ und $f : O \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so heißt der Zeilenvektor $\operatorname{grad} f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ der Gradient von f in x. Oft verwendet man auch den Operator Nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, also $\nabla f = \operatorname{grad} f$. – In dem Zusammenhang vergleiche Aufgabe 12.

2. $f : [a,b] \times O \to \tilde{B}$ sei stetig mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (O ist offen in B; $B, \tilde{B}$ sind reelle Banachräume). Dann ist (2a.) $g(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ stetig differenzierbar auf O und (2b.) $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_2}(t,x)dt$.

Ist (mit nun schon gewohnter Bezeichnung) $f : O \to \tilde{B}$ stetig differenzierbar, so ist $f' : O \to C(B, \tilde{B})$ eine Abbildung zwischen Räumen wie gezeigt. Falls f' differenzierbar bei $x_0 \in O$ ist, so heißt f zweimal differenzierbar bei x_0; Schreibweise: $f''(x_0)$. Dieses $f''(x_0)$ ist ein Element in $C(B, C(B, \tilde{B})) = C(B \times B, \tilde{B})$. Die letzte Gleichheit resultiert aus der Identifikation

$$C(B, C(B, \tilde{B})) \in \psi \longleftrightarrow [(s,t) \mapsto \psi(s)(t)]\,,\ s,t \in B\,.$$

Statt $\psi(s)(t)$ schreiben wir auch $\psi(s,t)$.

Satz. *Ist f zweimal differenzierbar bei x_0, so gilt*

> *bei festem $t \in B_1$ ist die Ableitung von $x \mapsto f'(x) \cdot t$ bei x_0 die Funktion $s \mapsto f''(x_0) \cdot (s,t)$*
>
> *die bilineare Abbildung $(s,t) \mapsto f''(x_0) \cdot (s,t)$ ist symmetrisch, i.e. $f''(x_0) \cdot (s,t) = f''(x_0) \cdot (t,s)$*
>
> *$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ und $f''(x_0) \cdot (s,t) = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) s_i t_j$, falls $B = \mathbb{R}^n$ und s,t die Koordinaten s_i bzw. t_j haben.*

Im Fall $B_1 = \mathbb{R}^n, B_2 = \mathbb{R}$ heißt die symmetrische Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j}$ die Hessesche Matrix von f bei x_0. Wir schließen gleich die folgende Beobachtung an. Sei also $f : O \to \mathbb{R}$, O offen in $\mathbb{R}^n$, zweimal stetig differenzierbar bei x_0. Der Punkt $x_0 \in O$ heißt ein lokales Extremum (Maximum bzw. Minimum) von f auf O, wenn $f(x_0) \ge f(x)$ bzw. $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \subset O$ mit geeignetem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Satz. *a) Ist x_0 lokales Extremum, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0\,,\ 1 \le i \le n\,.$*

b) Gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0\,,\ 1 \le i \le n$, so ist x_0 ein lokales Maximum (Minimum), wenn die Hessesche Matrix von f bei x_0 negativ (positiv) definit ist. Ist sie indefinit, so liegt bei x_0 kein lokales Extremum von f vor.

Erinnerung: Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}_{n\times n}$ definiert eine quadratische Form durch $(x,y) \mapsto x^t S y\,,\ x,y \in \mathbb{R}^n$. Sie heißt positiv (negativ) definit, falls $(x,x) > 0$ (< 0) für alle $x \ne 0$ richtig ist, und indefinit, falls es x,y mit $(x,x) < 0$ und $(y,y) > 0$ gibt [7].

Zu mehrfach stetig differenzierbaren Funktionen findet man, entsprechend $\boxed{\text{A1}}$, S. 21/22, eine Taylorreihenentwicklung:

Satz. *$f : O \to \tilde{B}$ sei k-mal stetig differenzierbar. Für ein Intervall $[x, x+b] \subset O$ gilt dann*

$$f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + \frac{1}{2!} f''(x) \cdot t^{(2)} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x) \cdot t^{(k-1)} +$$

$$+ \left(\int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x + \zeta t) d\zeta \right) \cdot t^{(k)}\ ;$$

[7] Die zu $f''(x_0)$ bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ gehörige symmetrische Matrix $A = (f''(x_0)(e_i, e_j))_{i,j}$ wirkt auf die Spaltenvektoren x,y mit Koordinaten ξ_i bzw. η_i gemäß $f''(x_0)(x,y) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) A (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t$.

hier ist $t^{(i)} = (t, \dots, t) \in B \times \cdots \times B$ (i Faktoren). Die multilinearen Abbildungen $f^{(i)}(x) \in C^i(B_1, B_2)$ sind symmetrisch und es gilt für vorgegebenes ε und hinreichend kleine $\| t \|$ die Abschätzung

$$\| f(x+t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} t^{(i)} \| \leq \varepsilon \| t \|^k \ .$$

5. Implizite Funktionen

Satz. *$U_\delta(x_0) \subset B$ werde von $f : U_\delta(x_0) \to B$ so abgebildet, daß stets*

$$\| f(x_1) - f(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|$$

mit einer Konstanten $0 \leq k < 1$ gilt. Falls $\| f(x_0) - x_0 \| < \delta(1-k)$, existiert genau ein Fixpunkt $z = f(z)$ von f.

Vgl. $\boxed{\text{A1}}$, S. 20. B ist hier natürlich wieder ein Banachraum.

Anwendungen:

(1) $f : U_\delta(0) \to B$ erfülle $\| f(x_1) - f(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|$ mit $0 \leq k < 1$. Gilt $\| f(0) \| < \delta(1-k)$, so existiert eine offene Umgebung $U \subset U_\delta(0)$ von 0, so daß $g(x) = x - f(x)$ eine eineindeutige bistetige Abbildung von U auf eine offene Umgebung von 0 ist.

(2) *$f : O \to B$ sei stetig differenzierbar (O offen in $B_1 \times B_2$; B_1, B_2, B Banachräume). Der Punkt $(x_0, y_0) \in O$ erfülle*

$$f(x_0, y_0) = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : B_2 \to B \text{ sei ein linearer bistetiger Isomorphismus.}$$

Dann existiert eine offene Umgebung U_0 von x_0 mit folgender Eigenschaft:

Zu jeder zusammenhängenden offenen Umgebung $U \subset U_0$ von x_0 gibt es genau eine stetige Abbildung $u : U \to B_2$ mit $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in O$, $f(x, u(x)) = 0$ für $x \in U$. Des weiteren ist u stetig differenzierbar auf U und

$$u'(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) \ .$$

Das ist der sogenannte *Satz über implizite Funktionen*. Im Falle $B_1 = \mathbb{R}^m, B_2 = B = \mathbb{R}^n$ liest er sich so:

f_i seien n skalare, stetig differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung $U \times V$ von $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mit

$$f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0$$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \right| \neq 0$$

(dabei läuft j, gemäß des Produktzerlegung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, von 1 bis n). Dann existiert eine Umgebung $U_0 \in U$ von $(a_1, \dots, a_m)$ mit folgender Eigenschaft:

Für jede zusammenhängende offene Umgebung $U_1 \subset U_0$ von $(a_1, \dots, a_m)$ gibt es genau ein System g_i $(1 \leq i \leq n)$ von n stetigen Skalarfunktionen auf U_1 mit $g_i(a_1, \dots, a_m) = b_i$ und $f_i(x_1, \dots, x_m, g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_1(x_1, \dots, x_m)) = 0$ für $(x_1, \dots, x_m) \in U_1$. Diese g_i sind stetig differenzierbar auf U_1 und ihre Jacobische Matrix ist $= -B^{-1}A$, wobei A [bzw. B] aus (f_{ik}) [aus (f_{ij})] durch Ersetzung von y_i durch $g_i(x_1, \dots, x_m)$ entsteht. – Hier bezeichnet f_{ik} [f_{ij}] die partielle Ableitung von f_i nach x_k [y_j].

6. Das Riemann Integral

f sei eine stetige reellwertige Funktion, definiert auf dem Quader

$$K_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \ .$$

Nach §4 ist $\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1$ eine stetige Funktion auf $K_{n-1} = [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Definition. $\int_{K_n} f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} \ldots (\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1) \ldots dx_n$.

Wir schreiben $C_c(\mathbb{R}^n)$ für den normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum [8]

$$\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \ f \text{ stetig} \ , \ \operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}} \text{ ist kompakt} \} \ .$$

In ihm ist die Norm durch $\| f \| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ erklärt. Das Supremum existiert, weil f außerhalb eines Kompaktums verschwindet. Die Konvergenz von Cauchy-Foplgen $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist nur gesichert, wenn alle f_k ihren Träger in einem gemeinsamen Kompaktum haben.

Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ setze

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{K_n} f(x)dx \ ,$$

falls K_n ein Quader mit $f(x) = 0$ für $x \notin K_n$ ist. Da $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist, existieren solche K_n; $\int f(x)dx$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von K_n. Ist $O \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : O \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger (i.e. $f \neq 0$ nur in $K \subset O$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt), so setzen wir $f(x) = 0$ für $x \notin O$, damit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, und $\int_O f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

$\boxed{\text{A1}}$, S. 12, impliziert, daß $f(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ eine Linearform auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ ist, die zudem monoton, i.e.,

$$f(x) \leq g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \, ,$$

und translationsinvariant, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n) \, ,$$

ist.

Satz. *Jede solche Linearform auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ ist von der Gestalt*

$$f(x) \mapsto \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \text{ mit einem } \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ .$$

Der Beweis des Satzes beruht auf der Möglichkeit, ein $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ durch besonders einfache Funktionen approximieren zu können.

Folgerung. *Mit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) \mid \det A \mid dx$.*

Man bemerke, daß obige Aussage eine Integrationssubstitution betrifft. Die allgemeine Substitutionsregel ist diese:

[8] supp f heißt der Träger von f. $\overline{\{\ldots\}}$ bedeutet den topologischen Abschluß der Menge $\{\ldots\}$.

O_1 und O_2 seien offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und φ eine umkehrbar eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung von O_1 auf O_2, so daß auch φ^{-1} stetig differenzierbar ist. Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n),\ f = 0$ außerhalb O_2 [9]*, gilt*

$$\int_{O_1} f(\varphi(t)) \mid \det \varphi'(t) \mid dt = \int_{O_2} f(x)dx \ .$$

Sie resultiert aus einer geschickten Approximation von φ durch affine Abbildungen $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ (also $g(x) = a + g_0(x)$ mit festem $a \in \mathbb{R}^n$ und $g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear).

Wir notieren noch eine (schwache) Verallgemeinerung der eindimensionalen partiellen Integration für das Riemann Integral:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_i} g(x)dx = -\int f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}dx$$

für $1 \le i \le n$ und stetig partiell differenzierbare Funktionen $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Denn $h = fg$ ist stetig differenzierbar in x_i und $= 0$ außerhalb eines Intervalls $[-c, c]$, also $\int_{\mathbb{R}} h' dx_i = \int_{-c}^{c} h' dx_i = 0$.

Bemerkung. Mit $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist auch $fg \in C_c(\mathbb{R}^n),\ (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

7. Das Lebesgue Integral

$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ und $\underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ bezeichnen die Mengen der Grenzwerte von monoton steigenden, bzw. fallenden, Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$; dies sind damit Funktionen, deren Werte in $\mathbb{R} \cup \infty$, bzw. $\mathbb{R} \cup -\infty$, liegen. $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ und $\underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ sind abgeschlossen bezüglich $+$ und skalarer Multiplikation aus $\mathbb{R}_{\ge 0}$.

Satz. $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \iff f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \infty$ *ist halbstetig von unten und* ≥ 0 *außerhalb einer kompakten Menge.*

f heißt dabei halbstetig von unten bei $x \in \mathbb{R}^n$, falls

$$\forall \text{ reelle } \alpha < f(x)\ \exists\ U_\delta(x) \text{ mit } f(y) > \alpha \ (\forall y \in U_\delta(x)) \ .$$

Analoges kann für $\underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ formuliert werden. Es folgt

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \cap \underline{C_c(\mathbb{R}^n)} = C_c(\mathbb{R}^n) \ .$$

Definition. *Für* $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$, $f = \lim f_\nu$ $(f_\nu \in C_c(\mathbb{R}^n))$, *setze* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)dx$ $(\in \mathbb{R} \cup \infty)$.

Wegen der Monotonieeigenschaft des Riemann Integrals existiert der Grenzwert. Sollte f sogar in $C_c(\mathbb{R}^n)$ liegen, stimmt das neue Integral mit dem Riemann Integral von f überein. Dies ist eine Folge des Satzes von Dini

> *Ist f_ν eine monoton wachsende Folge stetiger, reellwertiger Funktionen auf einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit stetiger Grenzfunktion f, so ist die Konvergenz $f_\nu \to f$ gleichmäßig auf K.*

[9] Diese Voraussetzng ist zugegebenermaßen unschön. Wir wollen hier aber die Diskussion des Integralbegriffs für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ noch nicht mit der recht subtilen Frage nach zulässigen Integrationsbereichen verknüpfen.

Entsprechend wird $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ für $f \in \underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ definiert.

Beobachtung: Das Integral auf $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ ist linear und monoton.

SATZ [Fubini]. *Sei $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^{n+m})}$. Dann gehört die Funktion*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

zu $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ und ihr Integral, als Funktion von $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, zu $\overline{C_c(\mathbb{R}^m)}$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n\Big) dx_{n+1} \dots dx_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f dx \ .$$

Analog für $\underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$.

Beispiele :

1. Ist K kompakt in $\mathbb{R}^n$, so gehört $\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}$ [10] zu $\underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$. Das Integral $V_K \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)dx$ heißt das Volumen von K. Fubinis Satz impliziert

   $V_K = V_{K_1} \cdot V_{K_2}$, wenn $K = K_1 \times K_2$ mit kompakten Mengen $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $K_2 \subset \mathbb{R}^m$.

2. Ist $g(x) = c + g_0(x)$ eine affine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und K wieder kompakt in $\mathbb{R}^n$, so gilt $V_{g(K)} = \mid \det g_0 \mid V_K$.

DEFINITION. *Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Setze

$$\overline{\int} f(x)dx = \inf \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \ , \ \varphi \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \ , \ \varphi \geq f \ ,$$

$$\underline{\int} f(x)dx = \sup \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \ , \ \varphi \in \underline{C_c(\mathbb{R}^n)} \ , \ \varphi \leq f \ .$$

Beobachtungen :

- $\underline{\int} f = \overline{\int} f = \int f$ für $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \cup \underline{C_c(\mathbb{R}^n)}$
- $\overline{\int} f dx = -\underline{\int}(-f)dx$
- $\underline{\int} \leq \overline{\int}$
- $f_1 \leq f_2 \Longrightarrow \overline{\int} f_1 \leq \overline{\int} f_2$
- $\overline{\int} \lambda f dx = \lambda \overline{\int} f dx$, falls $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $\sum\limits_{v=0}^{\infty} \int f_\nu dx \geq \int \sum\limits_{v=0}^{\infty} f_\nu dx$, falls $f \geq 0$.

[10] χ_K heißt die charakteristische Funktion von K

Wir nennen f Lebesgue integriebar, falls

$$\underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx \neq \pm\infty \ .$$

und bezeichnen die Menge aller dieser f mit $L_1'(\mathbb{R}^n)$. Hierin ist $L_1(\mathbb{R}^n)$ der Unterraum aller f mit $\pm\infty \notin$ Bild f. Beides sind $\mathbb{R}$-Vektorräume. $L_1(\mathbb{R}^n)$ genügt den Eigenschaften

$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow |f|, \sup(f,g), \inf(f,g) \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$fg \in L_1(\mathbb{R}^n)$, falls $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und g beschränkt ist

$|f|^p \in L_1(\mathbb{R}^n)$, falls $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und beschränkt ist; p ist beliebig reell ≥ 1 .

Das Lebesgue Integral ist eine monotone Linearform auf $L_1(\mathbb{R}^n)$. Des weiteren gilt:

Für $f_1 \in L_1(\mathbb{R}^n), f_2 \in L_1(\mathbb{R}^m)$ gehört die Funktion

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x,y) \mapsto f_1(x)f_2(y)$$

zu $L_1(\mathbb{R}^{n+m})$ und es gilt $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_1(x)f_2(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f_2(y)dy$.

All dies resultiert aus folgender Beobachtung. Auf dem Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ liefert

$$\| f \|_1 = \overline{\int} |f(x)|dx \ \in \ \mathbb{R} \cup \infty$$

eine Fastnorm:

$$\| \lambda f \|_1 = |\lambda| \, \| f \|_1 \ , \ \| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1 \ .$$

$L_1'(\mathbb{R}^n)$ entsteht nun aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ durch "Abschließung bezüglich der $\| \ \|_1$-Topologie", genauer:

f Lebesgue integrierbar $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$: $\| f - g_\varepsilon \|_1 < \varepsilon$.

Konvergiert in diesem Sinne die Folge $g_\nu \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gegen f, so ist $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)dx$.

DEFINITION. *$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt meßbar, falls $\chi_M \in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Beobachtungen:

1) Durchschnitt, Vereinigung, Differenz zweier meßbarer Mengen sind meßbar; beschränkte offene oder abgeschlossene Menge sind meßbar.

2) Wir erklären $\int_M f(x)dx$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und meßbares M durch $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_M(x)dx$.

3) Nullmengen N sind meßbare Mengen mit $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_N dx = 0$. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge [11]. Hyperebenen sind Nullmengen.

4) $f = g$ f.ü. heißt, daß die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fast überall gleich sind, und das wiederum, daß $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

   Es gilt: $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $f = g$ f.ü. $\Longrightarrow g \in L_1(\mathbb{R}^n)$& $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} g dx$.

5) Ist $f \in L_1'(\mathbb{R}^n)$, so ist $\{x : f(x) = \pm\infty\}$ eine Nullmenge.

[11] $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}$

Satz.

a) *O_1 und O_2 seien offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und φ eine umkehrbar eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung von O_1 auf O_2, so daß auch φ^{-1} stetig differenzierbar ist. Dann ist $f : O_1 \to \mathbb{R}$ genau dann über O_1 Lebesgue integrierbar, wenn $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ über O_2 Lebesgue integrierbar ist. In diesem Fall gilt:*
$$\int_{O_1} f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|dt = \int_{O_2} f(x)dx \, .$$

b) [Fubini] *Zu $f \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$ mit*
$$y \notin N \Longrightarrow [x \mapsto f(x,y)] \in L_1(\mathbb{R}^n) \ \& \ \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx)dy \, .$$

c) [B. Levi] *Ist $f_\nu \in L_1'(\mathbb{R}^n)$ eine monoton wachsende Folge mit $\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)dx < \infty$, so gehört $f = \lim f_\nu$ zu $L_1'(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)dx$.*

d) [Lebesgue] *$f_\nu \in L_1(\mathbb{R}^n)$ konvergiere fast überall gegen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und es sei $|f_\nu| \le g$ für alle ν und eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \infty$ mit endlicher Fastnorm $\| g \|_1$. Dann ist f integrierbar und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)dx$.*

Bemerkungen :

1. Die Eigenschaften c) und d) des Lebesgue-Integrals werden zum Beweis von a) benötigt, dazu außerdem noch die Substitutionsregel auf Seite 9 für stetige Funktionen. Die Eigenschaften a) und b) sowie das sogenannte *Cavalierische Prinzip* (vgl. auch Aufgabe 17), nämlich

   ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und wird, für $t \in \mathbb{R}$, $K_t = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \cdots, x_{n-1}, t) \in K\}$ gesetzt, so gilt $\operatorname{vol}(K) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{vol}(K_t)dt$,

   sind die wichtigsten Hilfsmittel bei Integralberechnungen. Mehr dazu wird in der Vorlesung Analysis 3 vorgestellt.

2. Im Beweis von a) geht auch dies ein.

   Ist $f_\nu \in L_1(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge im Sinne von $\| \quad \|_1$, i.e. zu $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $[\, \nu, \mu > N \Longrightarrow \| f_\nu - f_\mu \|_1 < \varepsilon \,]$, so existieren eine Teilfolge f_k und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit: f_k konvergiert punktweise gegen ein $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, m.a.W.: $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Des weiteren: $\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_1 = 0$.

   Daraus resultiert folgende Beobachtung. Setze $\overline{L}_1(\mathbb{R}^n) = L_1(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{N}$ mit dem Teilvektorraum $\mathfrak{N} = \{f \in L_1(\mathbb{R}^n) : f = 0 \text{ f.ü.}\}$. Dann wird $\overline{L}_1(\mathbb{R}^n)$ über $\| \overline{f} \|_1 \overset{\text{def}}{=} \| f \|_1$, mit $f \bmod \mathfrak{N} = \overline{f}$, ein normierter Raum und ist also, nach obigem, sogar ein Banachraum.

8. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Systeme von Differentialgleichungen, die in diesem Paragraphen behandelt werden, sind sogenannte Systeme von m Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Solchen liegen eine stetige Funktion
$$f : O \to \mathbb{R}^m \text{ mit } O \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n$$

und eine n-mal differenzierbare Funktion

$$y : I \to \mathbb{R}^m\ ,\ x \mapsto (y_1(x), \dots, y_m(x))^t \in \mathbb{R}^m\ ,\ I \text{ ein Intervall in } \mathbb{R}$$

zugrunde, so daß

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in O \text{ für } x \in I$$

und die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

in I erfüllt ist.

Ist $m = 1$ (und in aller Regel wollen wir uns darauf der Übersichtlichkeit halber beschränken), so sprechen wir von einer Differentialgleichung n-ter Ordnung. Indem wir aus ihr die Koordinatenfunktionen

$$y_0(x) \overset{\text{def}}{=} y(x),\ y_1(x) \overset{\text{def}}{=} y_0'(x), \dots, y_{n-1}(x) \overset{\text{def}}{=} y_{n-2}'(x),\ y_{n-1}'(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$$

ableiten, erhalten wir ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung: Solche sind beschrieben durch eine Funktion $\tilde{f} : \tilde{O} \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{O} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sowie durch eine differenzierbare Funktion $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^n$, so daß $(x, \tilde{y}(x)) \in O$ für $x \in I$ und $\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y})$ gilt. Ist noch $n = 1$, so sprechen wir einfach von einer Differentialgleichung 1. Ordnung.

Zurück zu obiger Differentialgleichung n-ter Ordnung. Hier wird also

$$\tilde{f}(x, \tilde{y}) = (y_1(x), y_2(x), \dots, f(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})) \text{ und } \tilde{y}(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))\,.$$

Bemerkung. Im allgemeinen Fall $m \geq 1$ kommen wir so auf ein System von nm Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Wir überzeugen uns als erstes davon, daß wenn immer wir die Lösungen des einen Systems kennen, wir auch die des anderen haben. Löst nämlich $y = y(x)$ unsere Differentialgleichung n-ter Ordnung, so löst $(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ das obige System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung; umgekehrt, ist $y(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))$ eine Lösung des letzteren Systems, so ist $y_0(x)$ eine der ursprünglichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Wann ist nun ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung lösbar, und wieviele Lösungen gibt es?

Eindeutigkeitssatz

> *Eine bezüglich der Variablen $y_1, \dots, y_n$ partiell stetig differenzierbare Funktion* [12] *f genügt lokal einer Lipschitzbedingung auf O. Ist $x_0 \in I$ vorgegeben, so gibt es höchstens eine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ mit vorgegebenem Wert $y(x_0)$.*

Existenzsatz

> *Ist zudem O offen, so existiert zu jedem $(x_0, y_0) \in O$ ein $\rho \in \mathbb{R}_{>O}$ und eine Lösung $y(x)$ auf $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ mit $y(x_0) = y_0$.*

[12] Wir verzichten ab sofort auf die Schlange über f, y und O, so daß also $f = f(x_1, y_1, \dots, y_n)$ eine Funktion von $O \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$ ist und $y : I \to \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ erfüllt.

Die lokale Lipschitzbedingung auf O fordert von f die Erfüllung einer Ungleichung

$$\| f(x,y_1) - f(x,y_2) \| < c \| y_1 - y_2 \|$$

für alle $(x,y_1),(x,y_2) \in U_\delta(a,b) \cap O$ an jedem Punkt $(a,b) \in O$. Dabei ist $\delta > 0$ geeignet und hängt wie die Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ vom Punkt (a,b) ab.

Der Beweis des Existenzsatzes verwendet das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren

$$g_{\nu+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + \int_{x_o}^{x} f(t, g_\nu(t))dt \ , \ g_0(x) = y_0 \ ;$$

dies ist eine Funktionenfolge, die zufolge der Lipschitzbedingung auf einem gewissen Intervall $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset I$ gegen eine Lösung $y(x)$ konvergiert.

Beispiel:

$y' = 2xy \quad (I = \mathbb{R} \ , \ n = 1 \ , \ O = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \ f(x,y) = 2xy)$

Die Lipschitzbedingung $|2xy_1 - 2xy_2| = 2|x| \ |y_1 - y_2|$ ist für $(x,y_j) \in U_\delta(x_0,y_0)$ mit $c = 2(|x_0| + \delta)$ erfüllt. Unsere *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$ habe $x_0 = 0$ und ein beliebiges y_0. Wir setzen an

$$g_{\nu+1}(x) = y_0 + 2\int_0^x t \ g_\nu(t)dt \ , \ g_0(x) = y_0 \ .$$

Es folgt $g_\nu(x) = y_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2\nu}}{\nu!}) \ \rightarrow \ y_0 e^{x^2}$.

Es bereitet keine Schwierigkeit, die obigen Sätze in entsprechende Aussagen für Systeme von Differentialgleichungen n-ter Ordnung zu übersetzen.

9. Spezielle Differentialgleichungen

9a. Die Differentialgleichung 1. Ordnung $y'(x) = f(x)g(y)$ (getrennte Variable)

Vorausgesetzt ist, daß sowohl f als auch g stetige reellwertige, auf offenen Intervallen I_f bzw. I_g definierte Funktionen sind, und daß $g \neq 0$ auf I_g ist. Zu einem festen $(x_0,y_0) \in I_f \times I_g$ bilde

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ , \ G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} \ .$$

Dann gilt $G(y(x)) = F(x)$ für alle x aus einem geeigneten Intervall um x_0.

Beispiele:

a) $f(x) = 1$, also $y'(x) = g(y)$. Mithin: $F(x) = x$ (x_0 sei $= 0$), $G(y(x)) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = x$.

Beachte nun, daß nach Voraussetzung $G'(y) = 1/g(y)$ das Vorzeichen nicht wechselt, G demzufolge streng monoton ist und damit die Umkehrfunktion G^{-1} existiert: $y(x) = G^{-1}(x)$.

b) $y' = \frac{x}{y}$. Wieder sei $x_0 = 0$ ($I_f = \mathbb{R}$); y_0 sei $= 1$ und $I_g = \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $F(x) = \int\limits_0^x t\ dt = \frac{x^2}{2}$, $G(y) = \int\limits_1^y t\ dt = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}$, $y^2 - 1 = x^2$, $y^2 = 1 + x^2$, $y = \sqrt{1+x^2}$.

9b. Die Differentialgleichung $y' = f(y/x)$

Ihr ordnen wir die neue Differentialgleichung $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$ zu.

SATZ. *y löst $y' = f(y/x) \Longleftrightarrow \frac{y(x)}{x}$ löst $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$.*

Beispiel: $y' = 1 + y/x$, $x \neq 0$; also $f(z) = 1 + z$, $z = \log x$, $y = x \log x$.

9c. Lineare Differentialgleichungen

Diese haben die Form $y' = a(x)y + b(x)$ mit stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$.

SATZ. *a) Ist $b(x) = 0$ (homogener Fall), und ist $x_0 \in I$, so ist $y = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$ die einzige Lösung mit $y(x_0) = y_0$.*
b) $y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^t a(u)du} b(t)dt \right)$ ist die einzige Lösung mit $y(x_0) = y_0$.

Nahe liegt, wie man auf *a*) kommt; wie aber auf *b*)? Das geschieht über die sogenannte Methode der *Variation der Konstanten*: Lösungen des homogenen Systems haben die Form $y(x)c$ (denn dann liest sich unsere Differentialgleichung $y' = a(x)y$ wie $(\log y)' = y'/y = a(x)$); fasse nun c als Funktion von x auf und verwende die Standardregeln der Differentialrechnung.

9d. Lineare Differentialgleichungssysteme

Hierbei handelt es sich um Differentialgleichungen der Form

$$y' = A(x)y + b(x)$$

mit differenzierbarer Funktion y und stetiger Funktion b, beide definiert auf dem offenen Intervall I und mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Die Funktion $A(x)$ ist eine reelle $n \times n$-Matrix $(a_{ij}(x))$, zusammengesetzt aus stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$.

SATZ. *Die Differentialgleichung ist lösbar. Jede Lösung ist durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmt ($x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}^n$)*

Einmal mehr erhält man die Lösung aus der Picard-Lindelöfschen Iteration

$$g_{\nu+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, g_\nu(t))dt\,,\ \ g_0(x) = y_0\,,$$

wobei $f(x, y) = A(x)y + b(x)\,,\ x \in I\,,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung. *a) Die sämtlichen Lösungen des homogenen Systems $y' = A(x)y$ bilden einen n-dimensionalen reellen Vektorraum V* [13]. *Äquivalent sind*

a1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in V$ *sind linear unabhängig,*

a2) $\exists x_0 \in I \ : \ \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_s(x_0)$ *sind linear unabhängig,*

a3) $\forall x_0 \in I \ : \ \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_s(x_0)$ *sind linear unabhängig.*

b) Die Gesamtheit der Lösungen des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$ ist die Menge $\varphi_0 + V$ mit irgendeiner (speziellen) Lösung $\varphi_0(x)$ von $y' = A(x)y + b(x)$.

Um φ_0 zu finden, reicht es schon, nur eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von V zu kennen. Setze nämlich mit der Matrix $\Phi(x)$, deren Spalten die Vektoren $\varphi_i(x)$, $1 \le i \le n$, sind,

$$\varphi_0(x) = \Phi(x) \cdot u(x) \, , \ u : I \to \mathbb{R}^n \, ,$$

an und folgere aus den üblichen Differentiationsregeln

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t) dt \ .$$

Ein weiteres Mal haben wir hier die Methode der Variation von Konstanten ausgenützt!

Beispiel: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $x_0 = 0$. Das homogene System ist $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$ und hat die offensichtlichen Lösungen

$$y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x \text{ und } y_1 = -\sin x, \ y_2 = \cos x \, .$$

Die Vektoren $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ und $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ bilden ein Fundamentallösungssystem und definieren die Matrix $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$; es ist $\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ und $\Phi(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$. Somit

$$\begin{aligned} u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} dt \ &= \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ \cos t + t \sin t \end{pmatrix} \Bigg|_0^x = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung $\varphi_0(x)$ ist demnach $\varphi_0(x) = \Phi(x) u(x) = \begin{pmatrix} \sin x - x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix}$.

9e. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Solche haben die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0 \text{ mit } a_i \in \mathbb{R} \, .$$ [14]

[13] Jede Basis davon heißt ein Fundamentallösungssystem von $y' = A(x)y$.

[14] Sind die a_i nichtkonstante, sondern stetige Funktionen auf einem Intervall, so reduzieren wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System von n Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Für konstante a_i können wir allerdings schneller vorgehen.

Wir assoziieren damit das Polynom in der Unbestimmten [15] d

$$p(d) = d^n + a_{n-1}d^{n-1} + \ldots + a_0$$

und schreiben die Differentialgleichung suggestiv als $p(d)y = 0$. Mit anderen Worten, wir erklären eine Wirkung von reellen Polynomen $p(d) = \sum_{j=0}^n a_j d^j$ auf den ∞-oft differenzierbaren Funktionen $y : I \to \mathbb{R}$ durch $p(d)y = (\sum\limits_{j=0}^{n} a_j d^j)y \overset{\text{def}}{=} a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y$. Alle geläufigen Gesetze einer Wirkung von Skalaren auf Vektoren sind erfüllt. Um die Existenz von Nullstellen der Polynome garantiert zu sehen, erlauben wir noch, daß die a_j komplex sein dürfen. Gleiches erlauben wir für die Werte von y; I bleibt allerdings ein offenes reelles Intervall. Von der Funktion $y(x) = y_r(x) + iy_i(x)$ verlangen wir dann, daß ihr Realteil y_r und Imaginärteil y_i unendlich oft differenzierbar sind.

1. Beobachtung: $(\sum\limits_{i=o}^{n} a_i d^i)e^{\lambda x} = (\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \lambda^i)e^{\lambda x}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.

Folgerung. *Ist $p(d)$ normiert vom Grad n (i.e., $a_n = 1$) und sind die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $p(d)$ alle einfach, so bilden die $\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x}$ $(1 \le j \le n)$ eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung $p(d)y = 0$* [16].

2. Beobachtung: $(d - \lambda)^k(y(x)e^{\lambda x}) = y^{(k)}(x)e^{\lambda x}$

Folgerung. *Es gelte $p(d) = \prod\limits_{j=1}^{r} (d - \lambda_j)^{k_j}$. Die Differentialgleichung $p(d)y = 0$ besitzt dann in den Funktionen*

$$y_{j\nu}(x) = x^\nu e^{\lambda_j x}\ ,\ 0 \le \nu \le k_j - 1\,,\ 1 \le j \le r$$

eine Basis ihres Lösungsraumes.

Hinsichtlich des inhomogenen Falls $p(d)y = b(x)$ sei erneut auf die Methode der Variation der Konstanten hingewiesen.

Zum Schluß betrachten wir noch lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' = A\ y\ ,\ A \in \mathbb{C}_{n \times n}\ ,\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \text{ [17]}.$$

Hat A den Eigenwert λ zum Eigenvektor a, also $Aa = \lambda a$, so ist offenbar $ae^{\lambda x}$ eine Lösung. Ist A diagonalisierbar, i.e., $\mathbb{C}^n$ besitzt eine Basis a_j von Eigenvektoren (zu den Eigenwerten λ_j) von A, so erschöpfen die $a_j e^{\lambda_j x}$ eine Basis des Lösungsraumes von $y' = Ay$. Für die Diskussion des allgemeinen Falles bringen wir A auf Dreiecksgestalt (z.B. auf Jordanform):

$$\exists S \in GL_n(\mathbb{C})\ :\ S^{-1}AS \text{ hat alle Einträge unterhalb der Diagonalen } = 0\,.\text{ [18]}$$

$y' = Ay$ übersetzt sich in $\tilde{y}' = S^{-1}AS\tilde{y}$; die Lösungen y der ersten Differentialgleichung hängen mit denen der zweiten, $\tilde{y}$, umkehrbar eindeutig über $\tilde{y} = S^{-1}y$ zusammen.

[15] d deutet den Differentialoperator $y \mapsto y'$ an

[16] dies ist ein komplexer Vektorraum

[17] also die Reduktion von $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ in ein homogenes System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung

[18] Wenn $A = A(x)$ eine nichtkonstante Matrix ist, kann $A(x)$ nicht unbedingt mehr für alle x simultan in Jordanform transformiert werden.

A habe jetzt Einträge a_{ij} mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$, $\lambda_i \overset{\text{def}}{=} a_{ii}$. Setze $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^t$ und $y_n(x) = \alpha_n e^{\lambda_n x}$ mit einem α_n an, das aus einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 = (c_1, \ldots, c_n)^t$ resultiert: $y_n(x_0) = c_n = \alpha_n e^{\lambda_n x_0}$. Um $y_{n-1}(x)$ zu bestimmen, lösen wir (wie gehabt) die inhomogene Differentialgleichung

$$y'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{n-1} + a_{n-1,n}\, y_n \;;$$

allgemein

$$y'_k = \lambda_k y_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} y_j \;.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und das neue System

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

i.e., $z'_2 = z_2$ und $z'_1 = z_1 + z_2$. Es folgt

$$z_2 = e^x \;,\; z_1 = e^x u(x) \;,\; u(x) = x$$

und damit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x(1+x) \end{pmatrix}$.

9f. Allgemeine lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Hier geschieht der Nachweis der linearen Unabhängigkeit von Lösungen von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$ [19]

über die *Wronski*-Determinante $W(x)$:

1. alle Lösungen zusammen bilden einen n-dimensionalen Vektorraum
2. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ sind dann und nur dann linear unabhängige Lösungen wenn

$$W(x) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0 \text{ ist.}$$

Des weiteren: Ist $\varphi_0(x)$ eine Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$ [20] ,

so ist $\varphi_0 + \langle \varphi_1, \cdots, \varphi_n \rangle$ die Gesamtheit der Lösungen.

[19] $y : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar; $a_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n-1$, sind stetig
[20] $b : I \to \mathbb{R}$ ist stetig

Zum Beweis übersetze nur obiges System in ein (inhomogenes) System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y_0, y_0' = y_1, y_1' = y_2, \ldots, y_{n-2}' = y_{n-1}\,;\; y_{n-1}' = -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \cdots - a_{n-1}(x)y_{n-1}(\,+b(x)\,)\,.$$

Lösungen sind dann Vektoren $(\varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x))^t$.

Eine Ergänzung: Spezielle lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung treten häufig in den Anwendungen (etwa der Physik) auf. Im allgemeinen lassen sich ihre Lösungen nicht durch elementare Funktionen angeben. Für die folgenden drei Typen gibt es jedoch sogar polynomiale Lösungen:

1) Legendresche Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\ ,\ -1 < x < 1$$

Lösung: Legendresche Polynome $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$

2) Hermitesche Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Lösung: Hermitesche Polynome $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$

3) Laguerresche Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Lösung: Laguerresche Polynome $L_n(x) :=\ e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$

Hierbei ist n stets eine natürliche Zahl.

Die Differentialgleichungen 1), 2) und 3) sind lineare homogene Differentialgleichungen vom Typ

$$(*) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0\ ,\ a,\ b \text{ stetig}\ .$$

Falls bereits eine nicht-triviale Lösung bekannt ist, so erlaubt der folgende Satz die Berechnung einer weiteren linear unabhängigen Lösung:

Satz:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Weiter sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ und für $x \in I$ gelte $\varphi(x) \neq 0$. Sei u eine nicht-konstante Lösung der Differentialgleichung

$$(**) \qquad u'' + \left(2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\right)\, u' = 0\ .$$

Dann ist durch $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$ eine von φ linear unabhängige Lösung von $(*)$ über I gegeben.

Bemerkung: $(**)$ ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für u' und kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. u erhält man dann durch Integration.