Professor Dr. Jürgen Ritter
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Institut für Mathematik · Universität Augsburg

Vorlesung Analysis 1 · Wintersemester 2002 / 03

Vorbemerkung

Das Folgende gibt einen Überblick über den Inhalt obengenannter Vorlesung und soll den Hörerinnen und Hörern als Leitfaden zur besseren anfänglichen Orientierung dienen; es ist nicht als Ersatz für die eigene Mitschrift oder gar für das Studium von Monographien über Analysis gedacht. Während des Fortgangs der Vorlesung werden des öfteren Ergänzungen erscheinen, möglicherweise sogar hier und dort eine Berichtigung oder Verbesserung, schließlich dann auch Fortsetzungen.

Literaturhinweise

[BF] Barner und Flohr, *Analysis*
[Bl] Blatter, *Analysis*
[Br] Bröcker, *Analysis*
[Co] Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*
[Di] Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*
[Du] Duschek, *Vorlesungen über höhere Mathematik*
[Ho] Holdgrün, *Analysis*
[Er] Erwe, *Differential- und Integralrechnung*
[Fi] Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*
[Fo] Forster, *Analysis*
[GL] Grauert und Lieb, *Differential- und Integralrechnung*
[He] Heuser, *Lehrbuch der Analysis*
[Ma] Maak, *Differential- und Integralrechnung*

und außerdem

zur Mengenlehre	:	Kamke, *Mengenlehre*
zu den Grundlagen	:	Landau, *Grundlagen der Analysis*
zur "Philosophie der Zahlen"	:	Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*
		———, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*

0. Sprache: Mengen, Funktionen

Eine Menge ist eine wohlbestimmte Gesamtheit von Objekten; die Objekte nennt man die Elemente der Menge. In diesem Kapitel werden Mengen mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; man schreibt dann $M = \{a, b, c, \dots\}$, wenn $a, b, c, \dots$ die Elemente der Menge M sind. $a \in M$ heißt: a ist Element von M; $x \notin M$: x ist nicht Element von M. Eine des weiteren gebräuchliche Schreibweise für eine Menge M ist: $M = \{z : z$ erfüllt eine gewisse

Eigenschaft$\}$. Wir vereinbaren, daß $m \neq M$ aus $m \in M$ für jede Menge M folge. Eine Menge T heißt Teilmenge von M, wenn jedes $t \in T$ auch Element von M ist; Notationen: $T \subset M$ oder auch: $t \in T \Longrightarrow t \in M$ ($t \in T$ impliziert $t \in M$).

Spezielle Mengen mit fixierter Bezeichnung sind

$\emptyset$	$=$	leere Menge: sie enthält gar kein Element und ist Teilmenge in jeder Menge
$\mathbb{N}$	$=$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$ $=$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $=$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$=$	$\{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ $=$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	$=$	$\{$ unendliche Dezimalbrüche $\}$ $=$ Menge der reellen Zahlen.

M heißt endlich, wenn M nur endlich viele Elemente besitzt; sonst unendlich. $|M|$ bezeichnet die Anzahl aller Elemente von M; falls die nicht endlich ist, wird $|M| = \infty$ gesetzt.

Operationen mit Teilmengen: T_1 und T_2 seien Teilmengen von M

Vereinigung	$T_1 \cup T_2$	$=$	$\{m \in M : m \in T_1$ oder $m \in T_2\}$
Durchschnitt	$T_1 \cap T_2$	$=$	$\{m \in M : m \in T_1$ und $m \in T_2\}$
Differenz	$T_1 \setminus T_2$	$=$	$\{m \in T_1 : m \notin T_2\}$
Komplement	$\complement T_1$	$=$	$\{m \in M : m \notin T_1\}$

Zulässige Mengenbildungen aus gegebenen Mengen:

1) Teilmengen

2) Produktmenge von M und N: $M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$. In $M \times N$ gilt $(m, n) = (m_1, n_1)$ genau wenn sowohl $m = m_1$ als auch $n = n_1$. [1] Folglich $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

   Allgemeiner: I sei eine Menge und es liege für jedes $i \in I$ eine Menge M_i vor. Dann ist auch $\prod\limits_{i \in I} M_i = \{(\ldots, m_i, \ldots)_{i \in I} : m_i \in M_i\}$ eine Menge (mit folgender Gleichheit zwischen den Elementen: $(\ldots, m_i, \ldots)_{i \in I} = (\ldots, m_i', \ldots)_{i \in I} \iff m_i = m_i'$ für alle $i \in I$).

3) Potenzmenge von M : $\mathfrak{P}M = \{T : T \subset M\}$.

Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte:

Gegeben seien M und eine "Indexmenge" $I \subset \mathfrak{P}M$. Dann ist $\bigcup_{T \in I} T = \{m \in M : m$ gehört zu wenigstens einem T in $I\}$ und $\bigcap_{T \in I} T = \{m \in M : m$ gehört zu allen T in $I\}$.

Beweismethodik und Mengen:

Es sei eine Aussage $\mathfrak{A}$ für gewisse Elemente einer Menge R (z.B. $R = \mathbb{R}$) zu beweisen. Man unterscheidet zwischen der direkten und indirekten Methode. Zu $\mathfrak{A}$ korrespondiert eine Teilmenge von A von R, die "Richtigkeitsmenge" $A = \{x \in R,\ x$ erfüllt $\mathfrak{A}\}$. Die direkte Methode nachzuprüfen, ob $\mathfrak{A}$ für eine Zahl $y \in R$ zutrifft, besteht nun im Beweis, daß $y \in A$, die indirekte Methode darin, aus der Annahme $y \notin A$ einen Widerspruch herzuleiten.

---

[1] Das Gleichheitszeichen $=$ ist eine Relation, deren Definition schon, wie vieles zuvor auch, durch den (korrekten) Sprachgebrauch festgelegt ist. Beachte die Gültigkeit der drei Grundregeln: $a = a$ (Reflexivität), $a = b \Longrightarrow b = a$ (Symmetrie), $a = b\ \&\ b = c \Longrightarrow a = c$ (Transitivität); hier sind a, b, c beliebige Elemente einer Menge.

Entsprechend bedeutet eine Implikation $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}$, daß $A \subset B$, wozu $\complement B \subset \complement A$ gleichwertig ist, also (nicht $\mathfrak{B}$) $\Longrightarrow$ (nicht $\mathfrak{A}$).

Der Funktionsbegriff:

Gegeben sind zwei Mengen X und Y (i.a. $\subset \mathbb{R}$). Eine Zuordnung f, die jedem $x \in X$ ein bestimmtes $y \in Y$ zuweist, heißt Funktion oder Abbildung von X nach Y. Schreibweise: $f : X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f : x \mapsto y$ oder $f(x) = y$. Die Menge X heißt der Definitionsbereich von f; die Teilmenge $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ von Y heißt Bild- oder Wertebereich von f.

Beispiele von Funktionen sind die reellen Polynome vom Grad n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \ , \ a_n \neq 0 \ ;$$

hier sind die Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots, a_n$ feste (also von x unabhängige) reelle Zahlen; sowie die rationalen Funktionen $r(x)$, die als Quotient zweier Polynome entstehen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \ ;$$

hier darf der Definitionsbereich X von r natürlich keine Nullstelle des Nenners enthalten.

Die Funktion f heißt eineindeutig oder injektiv, wenn $x_1 = x_2$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ resultiert, auf oder surjektiv, wenn $f(X) = Y$, und bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Abzählbare Mengen:

M heißt abzählbar, falls eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert. Beispiele abzählbarer Mengen sind die endlichen Mengen und natürlich $\mathbb{N}$ selbst.

Lemma. *(1) M abzählbar, $|M| = \infty \Longleftrightarrow$ es gibt ein bijektives $f : \mathbb{N} \to M$*

(2) $T \subset M$, M abzählbar $\Longrightarrow T$ abzählbar

(3) $\cup_{T \in I} T$ ist abzählbar, wenn die Indexmenge I abzählbar und alle $T \in I$ abzählbar sind.

Folgerung. *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind beide abzählbar; $\mathbb{R}$ allerdings nicht.*

Noch einmal zu den beliebigen Vereinigungen und Durchschnitten:

Unter einer Familie T_j von Teilmengen einer Menge M, wobei der Index j eine gegebene Menge J durchläuft, versteht man eine Abbildung $f : J \to \mathfrak{P}M$. Man setzt dann $f(j) = T_j$ und erklärt $\cup_{j \in J} T_j = \cup_{T \in I} T$ mit $I = f(J) \subset \mathfrak{P}M$; entsprechend für den Durchschnitt T_j.

1. Zahlen

Kennzeichnende Eigenschaften der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

Je zwei reellen Zahlen a und b ist eindeutig ihre Summe $a + b \in \mathbb{R}$ und ihr Produkt $ab \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Es gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz:	$a+b=b+a$	$ab=ba$
Assoziativgesetz:	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$

Distributivgesetz: $(a+b)c=ac+bc$ (es folgt $a(b+c)=ab+ac$)

Substraktionsgesetz: Zu $a,b\in\mathbb{R}$ existiert genau ein $x\in\mathbb{R}$ mit $a+x=b$.

Es folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Elementes $0\in\mathbb{R}$ mit $a+0=a$ für alle $a\in\mathbb{R}$. - Man schreibt für obiges x auch $b-a$ und $-a$ für $0-a$.

Divisionsgesetz: Zu $0\neq a,\ b\in\mathbb{R}$ existiert genau ein $y\in\mathbb{R}$ mit $ay=b$.

Es folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Elementes $1\in\mathbb{R}$ mit $a\cdot 1=a$ für alle $a\in\mathbb{R}$. - Man schreibt für y auch $b\cdot a^{-1}$ oder b/a, und a^{-1} für $1/a$. Es ist $0\neq 1$.

Anordnungsgesetz: Für $0\neq a\in\mathbb{R}$ gilt entweder $a>0$ oder $-a>0$. Aus $a>0,\ b>0$ folgt $a+b>0$ und $ab>0$.

Dedekinds Schnittaxion: A,B seien zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit

$$A\cup B=\mathbb{R}\quad\&\quad A<B,\ \text{d.h. } a\in A\Longrightarrow a<b \text{ für alle } b\in B\,.$$

Dann existiert genau ein $s\in\mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R} & \& \quad x<s \quad\Longrightarrow\quad x\in A\\ x\in\mathbb{R} & \& \quad x>s \quad\Longrightarrow\quad x\in B \end{cases}\quad .$$

Anwendung (Archimedisches Axiom): Zu jedem $x\in\mathbb{R}$ existiert eine natürliche Zahl n ($=1+1+\ldots+1$, n-mal) mit $x<n$. Entsprechend gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $1/m<x$, wenn noch $x>0$. Somit gibt es weder unendlich große noch unendlich kleine reelle Zahlen.

(Literatur: z.B. [Du, pp.8,9,30 ff.] und [Ma, pp.1-7])

Einfachste Rechenregeln in $\mathbb{R}$:

$a+(-b)=a-b\ ,\ a\cdot(-b^{-1})=-ab^{-1}\ ,\ (-1)^2=1\ ,\ a\cdot 0=0\ ,\ -(-a)=a\ ,\ (a^{-1})^{-1}=a$

Einfachste Größenbeziehungen:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha 1) & x>y\ ,\ y>z\Longrightarrow x>z\\
(\alpha 2) & 1>0\ ;\quad x>0\Longrightarrow 1/x>0\\
(\alpha 3) & 0<x<y\Longrightarrow 1/x>1/y\\
(\alpha 4) & 0<x,y\Longrightarrow (x>y\iff x^2>y^2)\\
(\alpha 5) & x>y\ \&\ u>v\Longrightarrow x+u>y+v\\
(\alpha 6) & x>y\ :\\
 & z>0\Longrightarrow xz>yz\\
 & z<0\Longrightarrow xz<yz
\end{array}$$

Zweite Anwendung des Dedekindschen Schnittaxions:

Satz 1.1. *$d\in\mathbb{R}\ ,\ d>0\iff$ es gibt ein $s\in\mathbb{R}$ mit $s^2=d$;*
d.h. jede positive reelle Zahl ist Quadrat in $\mathbb{R}$.

Beweisskizze: Zerlege $\mathbb{R}$ in $A \cup B$ mit

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 0 \text{ oder } (x > 0 \ \& \ x^2 \leq d)\} \text{ und } B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0 \ \& \ x^2 > d\}\,.$$

Aus ($\alpha 4$) resultiert $A < B$. Somit existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit "$x < s \Longrightarrow x \in A$" und "$x > s \Longrightarrow x \in B$".

Behauptung: Dieses s erfüllt $s^2 = d$.

Im folgenden wird $s^2 > d$ zum Widerspruch geführt; analog zeigt man, daß $s^2 > d$ unmöglich ist. Also bleibt nur $s^2 = d$ übrig.
Zunächst kommt man zu einer einfachen Abschätzung für s: Dem Archimedischen Axiom (p.4) zufolge existiert nämlich ein n mit $d > 1/n$, und da n durch eine geeignete Potenz von 10 übertroffen wird (vgl. 1.4 weiter unten), etwa $n < 10^{2t}$, erreicht man $d > 1/10^{2t}$ und deshalb sicher $s \geq 1/10^t$, da sonst ja $1/10^t \in A$.

Entsprechend schließt man, daß $d < 25 \cdot 10^{2v}$ mit einer geeigneten Zehnerpotenz 10^{2v}, also $s \leq 5 \cdot 10^v$.

Angenommen nun, $s^2 > d$. Dann ist $s^2 - d > 0$, und man kann wieder wie oben auf die Existenz einer Zehnerpotenz 10^r mit $s^2 - d > 1/10^r$ schließen.

Die bisherigen Abschätzungen können so zusammengefaßt werden: $1/10^w \leq s \leq 5 \cdot 10^w$, $s^2 - d > 1/10^w$; man wähle für w nur die größte der drei Zahlen t, v, r.

Betrachte jetzt $s - 1/10^{2w+1}$; diese Zahl ist positiv und liegt in A, also ist ihr Quadrat $\leq d$. Aber:

$$\begin{aligned}(s - \tfrac{1}{10^{2w+1}})^2 &= s^2 - \tfrac{2s}{10^{2w+1}} + \tfrac{1}{10^{4w+2}} > s^2 - \tfrac{2s}{10^{2w+1}} \geq \\ &\geq s^2 - \tfrac{2 \cdot 5 \cdot 10^w}{10^{2w+1}} = s^2 - \tfrac{10^{w+1}}{10^{2w+1}} = s^2 - \tfrac{1}{10^w} > d \qquad .\end{aligned}$$

Folgerung. *$\mathbb{Q}$ erfüllt kein Dedekindsches Axiom, da sonst z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ wäre.*

Zurück zu den natürlichen Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1,\ \ldots\} \subset \mathbb{R}$; es gilt $1 < 2 < 3 < \ldots$, insbesondere ist $\mathbb{N}$ unendlich.

Satz 1.2. *Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.*

Satz 1.3. *In $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{N}$ als Teilmenge durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert:*

(1) $1 \in \mathbb{N}$

(2) $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

(3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und gilt $\begin{cases} 1 \in M \\ n \in M \implies n+1 \in M \,, \end{cases}$ *so ist $M = \mathbb{N}$.*

Satz 1.4. *Ist $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ eine unendliche Kette natürlicher Zahlen, so existiert für jedes $q \in \mathbb{N}$ ein m_i aus dieser Kette mit $q < m_i$.*

Satz 1.5. *[Induktionssatz] Sind $\mathfrak{A}(n)$ für die natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ Aussagen mit*

(a) $\mathfrak{A}(n_0)$ ist richtig

(b) $\mathfrak{A}(n) \Longrightarrow \mathfrak{A}(n+1)$ für jedes $n \geq n_0$,

so sind die Aussagen $\mathfrak{A}(n)$ für alle $n \geq n_0$ richtig.

Anwendungen und Beispiele:

1) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (und analog $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$, ...)

2) M_n sei eine n-elementige Menge und S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen ("Permutationen") von M auf sich; die Elemente von S_n entsprechen also eineindeutig den verschiedenen Anordnungen der Elemente von M_n. Es gilt:

$$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n \qquad [\,n - \text{Fakultät}\,]$$

3) Für $1 \leq i \leq n$ bezeichne $\binom{n}{i}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Dingen i auszuwählen. Es gilt:

3a) $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$; man definiert noch $\binom{n}{0} = 1$.
Somit $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ und allgemein $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

3b) $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ für $1 \leq i \leq n$ (*"Pascalsches Dreieck"*).

Beachte: $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$! $\binom{n}{i}$ ist ein sogenannter Binomialkoeffizient. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{R}$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} .$$

Literaturhinweise: [Co, pp. 21-25]; [Du, pp. 6,7,18-20]; [Ma, pp. 12 ff].

Die *Betragsfunktion* $|\;| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x \leq 0\,; \end{cases}$$

sie nimmt also nur nichtnegative Werte an. Sie regiert alles Folgende!

Es gelten die Regeln:

$|x| = |-x|$; $|xy| = |x||y|$; $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung); $|x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$.

Lemma. *[Schwarzsche Ungleichung]*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

Für eine positive reelle Zahl ε (die man sich am besten immer als sehr klein vorstellt), ist die ε-Umgebung der reellen Zahl x definiert durch

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \;:\; |x-y| < \varepsilon\} \;=\; (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\,.$$

Satz 1.6. *$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. in jeder ε-Umgebung einer reellen Zahl liegen stets auch rationale Zahlen.*

Anwendung: Für jede "Stellenzahl" t läßt sich die reelle Zahl $0 \leq x \leq 1$ durch eine rationale Zahl $0\,, a_1 a_2 \ldots a_t$ (alle a_i ganz und zwischen 0 und 9) mit dem Fehler höchstens in der t-ten Stelle approximieren (Dezimalbruchentwicklung, 1. Teil).

Definition. *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq m$ (bzw. $b \leq m$) für alle $m \in M$ gibt; b heißt dann eine obere (bzw. eine untere) Schranke für M. M heißt schlechthin beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist, d.h. es gibt ein b mit $|m| \leq b$ für alle $m \in M$.*

Eine Zahl s heißt kleinste obere Schranke von M, wenn s obere Schranke von M ist und wenn $s \leq b$ für jede andere obere Schranke b von M gilt. Sofern s existiert, ist es durch M dann eindeutig bestimmt; man schreibt $s = \sup M$ (Supremum) und genauer, falls nämlich $s \in M$, $s = \max M$ (Maximum). Entsprechend definiert man die größte untere Schranke $\inf\, M$ (Infimum) von M, die, sofern in M gelegen, auch als $\min\, M$ (Minimum) geschrieben wird.

Beispiel:

$$\sup[0,1] = \sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = 1 = \max[0,1]$$

$$\sup[0,1) = \sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\} = 1$$

Schreibweise: Ist $a \leq b$, so ist

$$\left\{\begin{array}{rcl} [a,b] &=& \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ das abgeschlossene Intervall } ab \\ (a,b] &=& \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ das linksoffene Intervall } ab \\ [a,b) &=& \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ das rechtsoffene Intervall } ab \\ (a,b) &=& \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ das offene Intervall } ab \end{array}\right.$$

Satz 1.7. *Ist $M \neq \emptyset$ und $\left\{\begin{smallmatrix} \text{nach oben} \\ \text{nach unten} \end{smallmatrix}\right\}$ beschränkt, so existiert $\left\{\begin{smallmatrix} \sup M \\ \inf M \end{smallmatrix}\right.$.*

Definition. *Die reelle Zahl h heißt ein Häufungspunkt der unendlichen Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von h unendlich viele Zahlen aus M liegen.*

Beispiele:

1) Genau die Elemente von $[0,1]$ sind auch die Häufungspunkte von $[0,1]$

2) $[0,1]$ ist die Menge der Häufungspunkte von $(0,1)$

3) $\mathbb{N}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

Satz 1.8. *[Bolzano-Weierstraß] Ist M beschränkt und unendlich, so besitzt M wenigstens einen Häufungspunkt.*

Definition. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn M endlich ist oder, im Falle, daß M unendlich ist, M jeden Häufungspunkt von M enthält.*

Beispiele: $\emptyset$, $\{x\}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, nicht aber $(0,1]$ und $\mathbb{Q}$.

Definition. *Eine Menge M heißt kompakt, wenn sie sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.*

Beispiele: endliche Mengen, $[0,1]$; aber $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Definition. *Eine Menge $U \in \mathbb{R}$ heißt offen, wenn U mit jedem Element $u \in U$ auch noch eine geeignete ε-Umgebung von u enthält.*

Beispiele: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ sind offen. Aber endliche, nichtleere Mengen sowie $\mathbb{Q}$, $(0,1]$, $[0,1]$ sind nicht offen.

Satz 1.9. *(i) M abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $\complement M$ offen. (Aber: die Verneinung von "offen" ist nicht "abgeschlossen".)*

(ii) Beliebige Durchschnitte sowie endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.

(iii) Endliche Durchschnitte sowie beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen.

Satz 1.10. *[Heine-Borel] Die kompakte Menge M sei überdeckt von (beliebig vielen) offenen Mengen U_ν*

$$M \subset \bigcup_\nu U_\nu \ .$$

Dann reichen schon endlich viele dieser U_ν aus, um M zu überdecken:

$$M \subset U_{\nu_1} \cup U_{\nu_2} \cup \ldots \cup U_{\nu_r} \ .$$

Literaturhinweise: Schlage in [Co;Du] im Index (Stichwortverzeichnis) nach unter: Supremum, Infimum; Häufungspunkt; abgeschlossen, offen, kompakt; sowie die Namen: Bolzano-Weierstraß, Heine-Borel. Für die Schwarzsche Ungleichung vgl. [Fi, S.255].

2. Folgen, Stetigkeit

(2.1) Folgen

Eine Folge ist eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ in einer bestimmten Anordnung:

$$(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \, .$$

Beispiele:

(1) konstante Folge $a = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$

(2) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$

(4) $a_1 = 1$, $a_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots$
aber: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ist keine Folge, jedoch $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} = \mathbb{Z}$ ist eine Folge.

Definition. *Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Glieder a_n der Folge liegen. Formal* [2]

$$\text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert eine natürliche Zahl } n_0 \text{ mit: } n > n_0 \Longrightarrow |a - a_n| < \varepsilon.$$

Beachte: n_0 hängt von ε ab. Schreibweise: $a_n \to a$ oder $\lim a_n = a$.

Beispiele: (1) oben konvergiert gegen a, (2) zufolge des Archimedischen Axioms gegen 0.

Eigenschaften konvergenter Folgen:

(F1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist durch die Folge eindeutig bestimmt.

(F2) Eine Umordnung einer konvergenten Folge führt stets wieder zu einer konvergenten Folge mit dem gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche.

(F3) Eine konvergente Folge (a_n) ist beschränkt; d.h. es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < b$ für alle n.

(F4) Eine beschränkte Folge enthält stets eine konvergente Teilfolge. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (a_n) konvergiert auch und zwar gegen den gleichen Grenzwert wie (a_n).
Bemerkung: (b_m) heißt Teilfolge von (a_n), wenn eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so daß $f(i) > f(j)$, wenn $i > j$, und $b_i = a_{f(i)}$.

(F5) Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent. Dabei heißt eine Folge (a_n) monoton $\left\{\begin{array}{c}\text{fallend}\\ \text{steigend}\end{array}\right.$, wenn $\left\{\begin{array}{c} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \\ a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots . \end{array}\right.$
Anwendung (des Beweises): Die Folge (3) oben konvergiert nicht ($a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$).

(F6) *Cauchys Konvergenzkriterium:*
(a_n) konvergiert $\Longleftrightarrow$ [zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n, m > n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\,].$$

Anwendungen:

1. Die Folge (4) oben konvergiert: $|a_n - a_m| \underset{n>m}{=} \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots \pm \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m+1}$.
2. $\mathbb{R}$ besteht genau aus den Grenzwerten der rationalen Cauchyfolgen, d.s. Folgen in $\mathbb{Q}$, die die rechte Seite des obigen Kriteriums (mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) erfüllen.

(F7) $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b \Longrightarrow$

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \text{ sofern } b \neq 0 .$$

[2] oder noch formaler und mit den Symbolen $\forall$ *(für alle, zu jedem)* und $\exists$ *(es gibt)*:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < \varepsilon$.

(F8) Gegeben seien drei Folgen $(a_n), (\tilde{a}_n)$ und (c_n). Es gelte: $\lim a_n = \lim \tilde{a}_n = a$ und $a_n \leq c_n \leq \tilde{a}_n$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (c_n) gegen a.

(F9) Sei $\lim a_n = a$. Sind fast alle $a_n \geq b$, so ist auch $a \geq b$.

Achtung: Aus $a_n > b$ folgt aber nicht $a > b$. Z.B. wähle $a_n = \frac{1}{n}$ und $b = 0$.

Beispiele: $\lim \frac{n}{n+1} = 1\,, \quad \lim b^n = \begin{cases} 0 \quad \text{für } -1 < b < 1 & [\,\frac{1}{1+x} \overset{\text{def}}{=} |b|\,,\ (1+x)^n < 1+nx\,] \\ 1 \quad \text{für } b = 1 & \\ \text{nicht vorhanden für} \begin{cases} b \leq -1 \\ b > 1 \quad [\,1+x \overset{\text{def}}{=} b\,] \end{cases} \end{cases}$

Literaturhinweise: [Ma, pp.16-30], [Co, pp.25-38], [Du, pp.36-51], [Fi, pp.31-65,71-79]

Bemerkung: Für eine Folge (a_n) kann auch $\lim a_n = \infty$ erklärt werden. Wenn nämlich zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $a_n > k$ für $n > n_k$ existiert, sagen wir, daß die Folge (a_n) gegen ∞ konvergiert. Offenbar gilt: $\lim a_n = \infty \iff \lim \frac{1}{a_n} = 0$. Entsprechend wird $\lim a_n = -\infty$ definiert. Damit nun die Regeln (F7) auch mit diesem Symbol ∞ richtig sind, setzt man:

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty\ ,\ \infty \cdot \infty = \infty\ ,$$

$$\infty \cdot b = b \cdot \infty = -\infty\ ,\ \infty + c = c + \infty = \infty = \infty + \infty$$

und $-\infty + c = c - \infty = -\infty$;

hier sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a > 0\ ,\ b < 0$. Unbestimmt bleiben: $\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty - \infty\ ,\ 0 \cdot \infty$.

In diesem Zusammenhang gilt der schöne Satz von Stolz (der einen Vorgriff auf die später zu beweisende Regel von de l'Hospital darstellt).

Satz 2.1. *Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim b_n = \infty$ und $b_{n+1} > b_n$ für fast alle n. Dann gilt $\lim a_n/b_n = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, wenn der rechte Limes existiert.*

Anwendung: Sei $\lim c_n = c$. Dann konvergiert die Folge $(\,\frac{1}{n}(c_1 + \ldots + c_n)\,)$ der arithmetischen Mittel der c_n auch gegen c: $a_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n c_i\,,\ b_n \overset{\text{def}}{=} n$.

(2.2) Stetigkeit

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit Funktionen, bei denen sowohl der Definitions- als auch der Wertebereich Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Solche Funktionen können addiert, multipliziert, in eingeschränktem Maße auch dividiert und schließlich noch "hintereinandergesetzt" werden:

Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ gegeben; $X \subset \mathbb{R}$. Man definiert

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)\ ,\ (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ und $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in X$; im letzten Fall natürlich nur für die $x \in X$, für die $g(x) \neq 0$ ist.

Schließlich: für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ (mit $X, Y \subset \mathbb{R}$) wird die Schachtelung von f mit g als die Funktion $g \cdot f$ von X nach $\mathbb{R}$ erklärt, die $(g \cdot f)(x) = g(f(x))$ erfüllt.

Definition. *Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ existiert mit: $x \in X\ \&\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Beachte, daß δ sowohl von ε als auch von x_0 (und natürlich von f) abhängt.

Beispiele: Stetig sind $f(x) = a$ (die konstante Funktion), $f(x) = x$ (die identische Funktion), $f(x) = |x|$ (die Betragsfunktion)

Eigenschaften stetiger Funktionen:

(St1) f sei stetig in x_0. (x_n) sei eine in X gelegene gegen x_0 konvergente Folge. Dann konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$, d.h. $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

(St2) $f, g : X \to \mathbb{R}$ seien beide stetig in x_0 Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, f/g stetig in x_0.

Anwendung: Jedes Polynom und jede rationale Funktion ist stetig.

(St3) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$; f sei stetig in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \cdot f$ in x_0 stetig.

Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen:

Satz 2.2. *(i) Sei X kompakt und f stetig auf X (d.h. stetig in jedem Punkt von X). Dann ist $f(X)$ kompakt.*

(ii) Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann existieren $c, d \in [a, b]$ mit $f(c) \geq f(x) \geq f(d)$ für alle $x \in [a, b]$. M.a.W., es existieren $\max f([a, b])$ *und* $\min f([a, b])$.

Satz 2.3. *[Zwischenwertsatz] f sei stetig auf $[a, b]$, und c, d seien zwei Intervallpunkte mit $f(c) < f(d)$. Dann existiert zu jedem t zwischen $f(c)$ und $f(d)$, also $f(c) < t < f(d)$, ein $x \in [c, d]$ mit $f(x) = t$.*

Anwendungen:

1) Das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalles ist ein abgeschlossenes Intervall.

2) Eine stetige Funktion, die auf $[a, b]$ erklärt ist und dort sowohl positive als auch negative Werte annimmt, hat eine Nullstelle in $[a, b]$. Insbesondere: Polynome ungeraden Grades besitzen stets reelle Nullstellen, ebenso Polynome $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a, x + a_0$ mit $a_n a_0 < 0$.

3) Ist $a \in \mathbb{R}$ positiv, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zahl $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt[n]{a} > 0$ und $\sqrt[n]{a}^n = a$.

4 Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ überall stetig und injektiv, so ist f streng monoton auf $[a, b]$ [3]. Insbesondere existiert in diesem Fall die Umkehrfunktion $g : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ [4], $g(y) = x :\Longleftrightarrow y = f(x)$. Man schreibt auch $g = f^{-1}$ [5].

Satz 2.4. *f sei monoton auf $[a, b]$ und nehme jeden Zwischenwert an. Dann ist f stetig auf $[a, b]$.*

Folgerung. *Ist f streng monoton und stetig auf $[a, b]$, so ist auch f^{-1} stetig.*

[3] i.e., $[x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)]$ oder $[x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)]$ auf $[a, b]$. Im ersten Fall sagt man auch *streng monoton steigend*, im zweiten *streng monoton fallend*. Läßt man überall das Gleichheitszeichen zu, so sagt man nur *monoton*.

[4] $f(a) < f(b)$ ist hier angenommen

[5] verwechsle nicht dieses f^{-1} und die Funktion $\frac{1}{f}$

Beispiel: *Exponential- und Logarithmusfunktion*

Für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ ist a^r eine wohldefinierte positive reelle Zahl (vgl. Anwendung 3 oben).
Definiere für $a > 1$ und beliebiges reelles x:

$$a^x = \sup\{a^r : x \geq r \in \mathbb{Q}\} \ .$$

Dann ergibt sich der Reihe nach:

$a^x = \inf\{a^s : x \leq s \in \mathbb{Q}\}$

$x < y \Longrightarrow a^x < a^y$

$a^{x+y} = a^x a^y$

$x \mapsto a^x$ ist stetig.

Analog erhält man die Exponentialfunktion zu einer Basis $0 < a < 1$; die ist natürlich nicht monoton steigen, sondern fallend.

Aufgrund obiger Folgerung existiert zu $x \mapsto a^x$ die Umkehrfunktion, die sogenannte Logarithmusfunktion $\log_a$, die für alle $x > 0$ erklärt ist und folgende Eigenschaften hat:

$x \mapsto \log_a x$ ist stetig und streng monoton

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Bemerkung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$ erfülle. Dann ist $f(x) = a^x$ mit $a = f(1) = f(\frac{1}{2})^2 \geq 0$.

Literaturhinweise: [Co, pp.47-52,60-65]; [Du, pp.84-99]; [Fi, pp.130-150]; [Ma, pp.51-58].

Definition. *$f : X \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf X, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit: $x_1, x_2 \in X$ & $|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Mit anderen Worten: δ hängt nur von ε (und von f und X) ab, nicht aber vom einzelnen Stetigkeitspunkt $x_0 \in X$.

Beispiel: $X = (0,1)$; $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf X.

Satz 2.5. *Ist X kompakt (etwa $X = [a,b]$) und f stetig auf X, so ist f auch gleichmäßig stetig auf X.*

Funktionenfolgen:

Es seien für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann liefert jedes feste $x \in X$ eine Folge $(f_n(x))$. Existiert der Grenzwert $\lim f_n(x)$ für jedes $x \in X$, so entsteht eine neue Funktion

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

von X nach $\mathbb{R}$. Selbst wenn alle f_n stetig sind, muß die Grenzfunktion f nicht stetig sein:

$$f_n(x) = x^n \ , \ X = [0,1] \ : \ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq 1 \\ 1 \text{ für } x = 1 \end{cases} \ .$$

Definition. *Die Funktionenfolge f_n heißt gleichmäßig konvergent gegen die Funktion f auf X, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit: $n > n_0 \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$; hierbei ist x beliebig aus X.*

Mit anderen Worten: n_0 hängt von ε, nicht aber vom jeweiligen Punkt $x \in X$ ab.

Satz 2.6. *f_n sei gleichmäßig konvergent gegen f auf X. Dann ist f stetig auf X, wenn nur alle f_n stetig auf X sind.*

(2.3) Reihen

Folgen (s_n) der Form $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $s_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}$ heißen Reihen; a_n heißt das n-te Glied der Reihe und s_n die n-te Reihe Partialsumme. Beachte: Bei Reihen läuft der Index n in der Regel schon von Null ab.
(Tatsächlich ist jede Folge $b_1, b_2, \ldots$ selbst eine Reihe: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(b_i - b_{i-1})$ – wobei hier $b_0 = 0$ gesetzt werde.) Der Grenzwert von (s_n) wird, sofern überhaupt existent, als $\sum a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ geschrieben.

Es gilt:

(R1) Konvergiert die Reihe (s_n), so ist (a_n) eine gegen Null konvergente Folge.
Konvergiert die Reihe (s_n) gegen s und die Reihe $(\tilde{s}_n)$ gegen $\tilde{s}$, und sind $u, v \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Reihe $(us_n + v\tilde{s}_n)$ mit dem n-ten Glied $ua_n + v\tilde{a}_n$ gegen $us + v\tilde{s}$.
Die Reihe (s_n) konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$n \geq m > n_0 \Longrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon \ .$$

(R2) Kriterium von Leibniz: (s_n) *sei eine alternierende Reihe, d.h. das n-te Glied ist von der Form $(-1)^i a_i$ mit positivem a_i. Gilt $a_i \leq a_{i-1}$ für alle i und* $\lim a_i = 0$*, so konvergiert die Reihe (s_n).*

(R3) (s_n) sei eine konvergente Reihe und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen ($n_0 = 0$ ist zugelassen). Setze $b_0 = a_0 + \ldots + a_{n_0}$, $b_1 = a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_1}$, ... und bilde die neue Reihe $b_0 + b_1 + \ldots$. Ist (s_n) konvergent, so existiert $\sum b_i$ und ist gleich $\sum a_i$.

Achtung: Man kann jedoch die Konvergenz von (s_n) nicht durch geeignetes Klammern testen! Ebensowenig darf man übrigens in Reihen die Glieder einfach umordnen.

Definition. *Die Reihe (s_n) heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $|a_0| + |a_1| + \ldots$ der Absolutbeträge konvergiert.*

(R4) (i) (s_n) absolut konvergent $\Longrightarrow$ (s_n) konvergent

(ii) Eine absolut konvergente Reihe kann beliebig umgeordnet werden, ohne daß Konvergenz und Grenzwert gestört werden.

Mit anderen Worten: Ist $a_0 + a_1 + \ldots$ absolut konvergent, und ist τ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N} \cup \{0\}$ auf sich, so ist auch $a_{\tau(0)} + a_{\tau(1)} + \ldots$ konvergent und $\sum a_i = \sum a_{\tau(i)}$.

Definition. *$a_0 + a_1 + \ldots$ und $b_0 + b_1 + \ldots$ seien zwei Reihen. Die Produktreihe ist definiert als die Reihe mit dem i-ten Glied $p_i = \sum_{\nu+\mu=i} a_\nu b_\mu$ (also $p_0 = a_0 b_0$, $p_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $p_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, ...).*

(R5) Sind (s_n) und (t_n) absolut konvergente Reihen, so konvergiert die Produktreihe aus (s_n) und (t_n) gegen $(\sum a_i)(\sum b_i)$.

(R6) Die geometrische Reihe und die Konvergenzkriterien:

a) Sei q reell und $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Dies ist die *geometrische Reihe zu q*. Sie ist für $|q| < 1$ absolut konvergent mit dem Grenzwert $1/1-q$ und für $|q| \geq 1$ divergent.
Eine Konsequenz ist: jede rarionale Zahl läßt sich als periodischer Dezimalbruch darstellen und jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl. Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind also genau die nicht-periodischen unendlichen Dezimalbrüche.

b) 1. Konvergenzkriterium: *Besitzt die Reihe (s_n) eine konvergente Majorante, d.h. ist $|a_i| \leq m_i$ für alle i und $m_1 + m_2 + \ldots$ konvergent, so ist (s_n) absolut konvergent.*

c) 2. Konvergenzkriterium (Quotientenkriterium und Wurzelkriterium):
Gilt für die Reihe (s_n) mit $a_i \neq 0$ für fast alle i, daß

$$|a_{i+1}/a_i| < q < 1 \text{ (bzw. } \sqrt[i]{|a_i|} < q < 1)$$

für fast alle i, so ist (s_n) absolut konvergent; ist aber

$$|a_{i+1}/a_i| \geq 1 \text{ (bzw. } \sqrt[i]{|a_i|} \geq 1)$$

für fast alle i, so ist (s_n) divergent.

Analog: Existiert der Grenzwert $\lim |a_{i+1}/a_i| = k$ (bzw. $\lim \sqrt[i]{|a_i|} = k$), so ist (s_n) absolut konvergent, wenn $k < 1$ ist, und divergent, wenn $k > 1$ ist. Der Fall $k = 1$ bleibt ungewiß!

Literaturhinweise: [Co, p.63, p.320 ff.]; [Du, pp.93-97, p.340 ff.]; [Fi, p.160]; [Ma, §9].

Beispiele:

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $E(x) = \sum_{\nu=0} x^\nu/\nu! = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$; diese Reihe ist für jedes x absolut konvergent und erfüllt die Funktionalgleichung $E(x+y) = E(x)E(y)$ (vgl. (R5)). Nach Satz 2.8 weiter unten ist $E(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion und damit eine Exponentialfunktion

$$E(x) = e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu/\nu!$$

mit $e = E(1) = 2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \ldots$ (vgl. Seite 12).

(2) $\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{2\nu+1}/(2\nu+1)! = x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots$
$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{2\nu}/(2\nu)! = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + - \ldots$;

dies sind die Kreisfunktionen, definiert und stetig (Satz 2.8) auf ganz $\mathbb{R}$.

Eigenschaften der Kreisfunktionen:

$\sin 0 = 0$, $\sin x > 0$ für kleine positive x

$\cos 0 = 1$, $\cos 3 < 0$

$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, daher $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$

Additionstheoreme:

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

(Bemerkung: die Additionstheoreme werden durch Differentiation später nachgewiesen werden; ebenso $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgert man:

Ist $\pi/2 \overset{\text{def}}{=} \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$, so ist $0 < \pi/2 < 3$ und $\cos \pi/2 = 0$.

Aus den Additionstheoremen und erneut dem Zwischenwertsatz folgt weiter:

1) $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi/2$
2) $0 \le x < y \le \pi/2 \Longrightarrow \cos x > \cos y$ und $\sin x < \sin y$.

Dies zeigt, wie die Kurven zu $\sin x$ und $\cos x$ im Intervall $[0, \pi/2]$ ungefähr aussehen; die Additionstheoreme ergeben dann den genauen weiteren Verlauf, insbesondere die Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ , \ \cos(x + 2\pi) = \cos x \ .$$

(3) $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$

$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + - \ldots$

beide Reihen konvergieren absolut für $|x| < 1$; wegen (R2) konvergiert die erste auch für $x = \pm 1$ und die zweite noch für $x = 1$. Der Logarithmus hier ist zur Basis e gebildet; daß die behauptete Gleichheit überhaupt richtig ist, wird unter (DP) im nächsten Kapitel nachgetragen.

(4) Die Binomische Reihe:

α sei reell, $|x| < 1$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu ;$$

die Gleichheit ist wieder eine Folge von (DP), die Konvergenz eine Folge vom Quotientenkriterium. Die allgemeinen Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{\nu}$ sind so erklärt: $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}$ für $\nu \in \mathbb{N}$.

(5) Die Riemannsche Zetafunktion:

$\zeta(s) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ konvergiert für reelles $s > 1$ (und divergiert für $s = 1$).

Reihen von Funktionen:

Sind $f_0, f_1, f_2, \ldots$ Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, so heißt $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ die aus den f_ν gebildete Funktionenreihe. Mit $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ ist eine zugehörige Funktionenfolge definiert, deren Grenzwert $f(x)$, sofern existent, als Grenzwert der Reihe bezeichnet wird: $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$.

Aufgrund von Satz 2.6 gilt:

> *Sind die $f_\nu(x)$ alle stetig auf X, und konvergiert die Funktionenfolge $(s_n(x))$ gleichmäßig auf X gegen die Funktion $f(x)$, so ist $f(x)$ stetig.*

Satz 2.7. *Die Funktionenfolge $(s_n(x))$ konvergiert gleichmäßig auf X gegen eine Funktion $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit: $n \geq m > n_0 \Longrightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$.*

Anwendung: Sind die f_ν alle stetig auf X, und gilt $|f_\nu(x)| \leq b_\nu$ für $x \in X$ und konvergenter Reihe $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ absolut konvergent und stetig auf X.

Potenzreihen:

Dies sind spezielle Reihen der Form $f_0(x) + f_1(x) + \ldots$ mit $f_\nu(x) = a_\nu(x-a)^\nu$. Durch Substitution kann man a nach 0 verschieben; im folgenden werden deshalb nur Potenzreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ betrachtet; als Definitionsbereich X wird stets ein Intervall mit Mittelpunkt 0 genommen.

Satz 2.8. *Konvergiert die Potenzreihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ an der Stelle x_1, so auch absolut an jeder Stelle x mit $|x| < |x_1|$ und darüberhinaus gleichmäßig auf jedem Intervall $[-\zeta, \zeta]$ mit $0 < \zeta < |x_1|$.*

Anwendung: Die Potenzreihen in den Beispielen (1), (2), (3), (4) sind stetig.

Satz 2.9. *Ist die Potenzreihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ gegeben, und ist*

$$\limsup\{\sqrt[\nu]{|a_\nu|} : \nu = 0, 1, 2, \ldots\} = 1/r\,,$$

so konvergiert die Reihe absolut für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. Der Fall $|x| = r$ bleibt ungewiß.

Die Zahl r heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Hierbei ist $\limsup\{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\}$ der größte Häufungspunkt der Folge $\{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\}$, sofern es einen solchen gibt; sonst wird $\limsup\{\ldots\} = \infty$ und $r = 0$ gesetzt [6]. Im Fall $\limsup\{\ldots\} = 0$ ist $r = \infty$ zu nehmen (Beispiel: $a_\nu = 1/\nu!$ – Exponentialreihe).

Literatur: z.B. [Du, letztes Kapitel]

3. Die Ableitung

Wir betrachten wieder nur Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}$. Für X gelte zusätzlich:

[6] Ein Häufungspunkt einer Folge (c_n) ist ein $h \in \mathbb{R}$ mit *für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|h - c_n| < \varepsilon$ für unendlich viele Indizes n*. Ist also die Menge $\{c_n\}$ unendlich, so ist dies die alte Definition eines Häufungspunktes.

(∗) X ist ohne isolierte Punkte, d.h. für jedes $x_0 \in X$ und jede Umgebung U von x_0 ist $\{x_0\} \subsetneq X \cap U$. (Beispiele: Intervalle.)

Definition. *f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in X$, falls es eine reelle Zahl ρ mit folgender Eigenschaft gibt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit: $X \ni x \neq x_0$ & $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \rho| < \varepsilon$.*

Man schreibt dann $\rho = f'(x_0)$ und nennt ρ den Differentialquotienten von f an der Stelle x_0 oder auch die Ableitung von f bei x_0.

Bemerkungen:

1) (∗) besagt, daß die Bedingung "$X \ni x \neq x_0$ & $|x - x_0| < \delta$" nicht leer ist, und daher ist ρ, sofern existent, eindeutig bestimmt.

2) Setze $h = x - x_0$ für $x_0 \neq x \in X$. Die Ableitung $f'(x_0)$ stellen wir uns dann anschaulich als den Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ vor.

3) Setze $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ und $\Delta x = h = x - x_0$. Der Quotient $\Delta y/\Delta x$ strebt dann für $\Delta x \to 0$ gegen den Differentialquoitenten ρ, der in diesem Zusammenhang auch gerne formal als $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}$ geschrieben wird. Beachte aber: $\frac{dy}{dx}$ ist kein Quotient reeller Zahlen.

4) f heißt differenzierbar auf X, wenn f in jedem Punkt von X differenzierbar ist; man erhält dann die abgeleitete Funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ von X nach $\mathbb{R}$. Ist diese stetig, so heißt f stetig differenzierbar auf X.

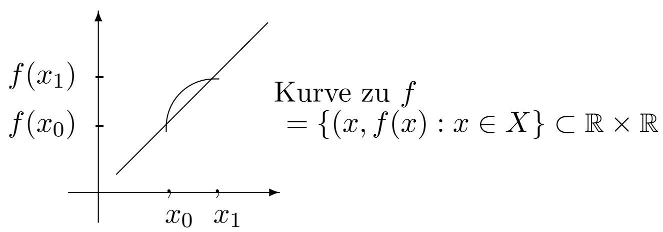
Beispiele:

$f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0$

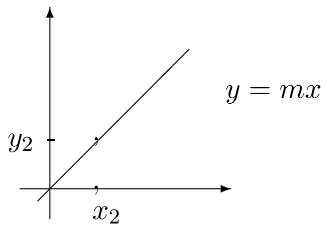
$f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

aber $f(x) = |x|$ ist nicht bei $x = 0$ differenzierbar.

Geometrische Interpretation der Ableitung:



Die Gerade $y = mx + b$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ erfüllt $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Verschiebe sie, ohne die Richtung zu ändern, durch den Punkt $(0, 0)$; sie hat dann die Gleichung $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x$. Wähle auf ihr den Punkt (x_2, y_2) mit $x_2 > 0$, der vom Nullpunkt die Entfernung 1 hat.



Es existiert genau ein $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ mit $x_2 = \cos u,\ y_2 = \sin u$. Also ist $m = \frac{f(x_1)-f(x_0}{x_1-x_0} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{\sin u}{\cos u} \stackrel{\text{def}}{=} \tan u$. Die letzte Gleichheit definiert eine Funktion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, die streng monoton steigend und stetig ist. Insbesondere ist u durch $\tan u$ bestimmt (vgl. auch mit der Funktion $\arctan x$). Mit anderen Worten: wenn der Punkt x_1 sich dem Punkt x_0 nähert, wird unsere erste Gerade $y = mx + b$ sich der Tangente an die Kurve zu f im Punkte x_0 annähern, so daß, zufolge der Stetigkeit von $\tan u$, der Differentialquotient $f'(x_0)$ die Steigung (= Tangens des Winkels zwischen Tangente und x-Achse) der Tangente angibt.

Analog verläuft die physikalische Interpretation der Ableitung als Geschwindigkeit – nämlich wenn x als Zeitparameter und y als Wegparameter gewählt wird. $f(x) - f(x_0)$ ist dann der Weg, der bei der Bewegung f in der Zeit $x - x_0$ zurückgelegt wird, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ also die durchschnittliche Geschwindigkeit hier und $f'(x_0)$ die augenblickliche.

Eigenschaften der Ableitung:

(A1) a) f differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow f$ stetig in x_0

b1) Ist f differenzierbar in x_0 und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine in X gelegene, gegen x_0 konvergente Folge (mit $x_n \neq x_0$ für fast alle n), so gilt $\lim \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$.

b2) Strebt für jede in X gelegene gegen x_0 konvergente Folge $x_1, x_2, \ldots$ (mit $x_n \neq x_0$ für fast alle n) die Folge $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ gegen einen von der speziellen Folge (x_n) unabhängigen Grenzwert ρ, so ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = \rho$.

(A2) Es seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar in x_0. Dann sind auch

$f \pm g$, $f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$, f/g differenzierbar in x_0. Es gilt:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \textit{Produktregel}$$
$$(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g(x_0)^2 \qquad \textit{Quotientenregel}$$

Anwendung: Polynome und rationale Funktionen sind differenzierbar; für $f(x) = ax^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist $f'(x) = nax^{n-1}$.

(A3) *Kettenregel:* Vorgelegt sei die geschachtelte Funktion $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Ist f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist gf in x_0 differenzierbar, und es gilt: $(gf)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

(A4) $f : X \to Y$ sei bijektiv und stetig auf dem Intervall X und in x_0 differenzierbar; g sei die Umkehrfunktion zu f. Wenn $f'(x_0) \neq 0$, ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Anwendung: $(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{1/n\ -1}$ $(x > 0, n \in \mathbb{Z})$.

(A5) X sei ein Intervall und x_0 ein innerer Punkt von X (also kein Endpunkt). f hat ein relatives Extremum bei x_0, wenn es eine in X gelegene Umgebung U von x_0 gibt, so daß

$f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in U$ ("relatives Maximum")
oder $f(x) \ge f(x_0)$ für alle $x \in U$ ("relatives Minimum").

Ist f differenzierbar in x_0, so folgt dann $f'(x_0) = 0$.

Anwendungen:

1) Satz von Rolle: *Es sei f stetig auf dem Intervall $[a,b]$ und differenzierbar im Innern (a,b). Falls es Punkte $x_1 > x_2$ in $[a,b]$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gibt, so existiert ein $\zeta \in (x_2, x_1)$ mit $f'(\zeta) = 0$.*

2) Mittelwertsatz: *Voraussetzung über f wie oben. Dann existiert ein $\zeta \in (a,b)$ mit $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

KOROLLAR. *i) Ist $f' = 0$ auf einem Intervall, so ist f dort konstant.*

ii) Gilt $f' = g'$ auf einem Intervall, so unterscheiden sich f und g um eine additive Konstante.

iii) Ist f differenzierbar auf einem Intervall X und gilt dort stets $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$), so ist f streng monoton steigend (bzw. fallend) auf X.

Literatur: etwa [Ma, pp.67-80]

(A6) Differentiation von Funktionenreihen:
Vorgelegt sei die auf X konvergente Reihe $f_0(x) + f_1(x) + \dots$ von differenzierbaren Funktionen $f_\nu(x)$. Konvergiert die Reihe der Ableitungen $f'(x)+f_1'(x)+\dots$ gleichmäßig auf X, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ differenzierbar auf X mit der Ableitung $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu'(x)$.

Anwendung: Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden; genauer: besitzt die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ den positiven Konvergenzradius r, so gilt in jedem Intervall $[-\zeta, \zeta]$ mit $0 \le \zeta < r$

$$(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$$

(denn zufolge $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$ haben $\sum a_\nu \nu x^{\nu-1}$ denselben Konvergenzradius.)

(DP) Differentiation spezieller Potenzreihen:

(a) $(e^x)' = e^x$; somit $(\log x)' = 1/x$ und $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$ für $|x| < 1$ (denn beide Seiten besitzen dieselbe Ableitung und stimmen für $x = 0$ überein).

FOLGERUNG. *(a1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$*

(a2) $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ für $n \to \infty$.

Dazu betrachte für (a2) den Differenzenquotienten $\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}$ für $h = \frac{x}{n}$ mit festem x und $n \to \infty$ (also $h \to 0$). (a1) resultiert aus $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, da $\log x^\alpha = \alpha \log x$.

(b) $(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^\infty \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$ für $|x|<1$

(denn $(1+x)\cdot(\sum\binom{\alpha}{\nu}x^\nu)' = \alpha\cdot\sum\binom{\alpha}{\nu}x^\nu$, also $\left(\frac{\sum\binom{\alpha}{\nu}x^\nu}{(1+x)^\alpha}\right)' = 0$, d.h. $\sum\binom{\alpha}{\nu}x^\nu = (1+x)^\alpha\cdot c$; setze jetzt $x=0$).

(c) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$

Folgerung: "arctan" ist die Umkehrfunktion zu "tan".

Die Additionstheoreme

$$\begin{cases} \cos(x+y) &= \cos x\cos y &- &\sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y &+ &\sin x\cos y \end{cases}$$

kann man ebenfalls durch Differentiation geeigneter Funktionen gewinnen: setze $f(t) = \cos(x+y) - \cos(x+t)\cos(y-t) + \sin(x+t)\sin(y-t)$. Dann gilt: $f'(t) =$ [Ableitung von f nach t] $=0$, also $f(0) = f(y)$, i.e. $\cos(x+y) - \cos x\cos y + \sin x\sin y = 0$.

(d) Stimmen die beiden Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu x^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^\infty b_\nu x^\nu$ auf einem Intervall $(-r_1, r_1)$ mit $r_1 > 0$ überein, so gilt: $a_\nu = b_\nu$ für alle ν.

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz:

f und g seien beide auf (a,b) differenzierbar und stetig an den Randpunkten. Dann existiert ein $\zeta\in(a,b)$ mit $f'(\zeta)(g(b)-g(a)) = g'(\zeta)(f(b)-f(a))$.

Zusatz: *Ist $g'(x)\neq 0$ auf (a,b), so gilt $g(a)\neq g(b)$ und $f'(\zeta)/g'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$* .

Anwendung: Regel von de l'Hospital (vgl. auch den früher erwähnten Satz von Stolz)

f und g seien differenzierbar in $(a,b]$ und $g'\neq 0$ dort. Ist $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (oder $=\infty$), so gilt

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)\,,$$

sofern der rechte Grenzwert überhaupt existiert.

Beispiel:

1) $\lim_{x\to\infty}(\log x)/x^\alpha = 0$ für jedes (noch so kleine) $\alpha > 0$

2) $\lim_{x\to\infty} e^x/x^\alpha = \infty$ für jedes (noch so große) $\alpha > 0$.

Das Newtonsche Verfahren:

Hierbei handelt es sich um die Auflösung einer Gleichung $f(x) = c$ für eine "genügend glatte Kurve" f. Die Aufgabe ist äquivalent zu: löse $f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = x$, wenn $f_1(x) = f(x) - c$ und $f_2(x) = f_1(x) + x$ gesetzt wird. Im zweiten Fall heißt x dann ein Fixpunkt von f_2.

Lemma. *[Fixpunktsatz] X sei ein abgeschlossenes Intervall und $\varphi : X\to X$ eine Funktion mit*

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le q|x_1 - x_2|$$

für ein $0\le q<1$ und alle $x_1, x_2\in X$. Dann besitzt φ genau einen Fixpunkt $z\in X$, und dieser erscheint als Grenzwert einer jeden Folge $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \ldots$ mit x_0 beliebig aus X.

Newtons Anwendung: Löse $f(x) = 0$. x_0 sei ein "Näherungswert". Bestimme x_1 als den Schnitt der Tangente an die Kurve f in $(x_0, f(x_0))$ mit der x-Achse: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$; ermittele entsprechend aus x_1 ein x_2 und fahre so fort. Damit das überhaupt möglich ist und zu etwas Sinnvollem führt, setze voraus:

1.) Es gibt eine Umgebung $X = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ von x_0, in der f differenzierbar mit nichtverschwindender Ableitung ist.

2.) Auch f' ist differenzierbar, und es ist $|f(x)f''(x)/f'(x)^2| \leq q < 1$ auf X. (Dies impliziert aufgrund des Mittelwertsatzes für die Funktion $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$, daß $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|$ für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt).

3.) $|f(x_0)/(f'(x_0)| \leq \delta(1 - q)$ (das impliziert $\varphi(X) \subset X$).

Jetzt gilt: die Folge x_0, $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), \ldots$ konvergiert gegen den Fixpunkt z von φ in X, also gegen eine Nullstelle z von f in X.

Bemerkung: Wegen $x_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$ und $\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i - x_{i-1}| \leq |x_{n+1} - x_n| \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-q} \leq |x_1 - x_0| \frac{q^n}{1-q}$ liefert das Verfahren zugleich eine Fehlerabschätzung für $|z - x_n|$.

Literatur: etwa [Du, pp. 373-378; 141; 220-225]

Die Taylorsche Reihe:

X sei ein abgeschlossenes Intervall und x_0 ein Punkt in X. Wir betrachten $(n + 1)$-mal differenzierbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition. *$g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$ heißt das n-te Taylorpolynom zu f bei x_0.*

Hier ist $x \in X$ und $f^{(i)}$ die i-te Ableitung von f.

Beobachtungen:

1) $g_n(x)$ ist ein Polynom in x vom Grad $\leq n$.
g_n und f haben bei x_0 denselben Funktionswert sowie dieselben höheren Ableitungen (bis zur n-ten). Das Polynom g_n "schmiegt sich also schön an die Kurve f im Punkte $(x_0, f(x_0))$ an".

2) Ist f selbst ein Polynom vom Grad $\leq n$, so gilt: $f(x) = g_n(x)$.

Definition. *$R_n(x) = f(x) - g_n(x)$ heißt das n-te Restglied.*

Es gibt den Fehler an, den man macht, wenn man $f(x)$ durch $g_n(x)$ ersetzt.

Setze nun für festes x und variables t zwischen x und x_0:

$$\varphi(t) = f(t) + \tfrac{x-t}{1!}f'(t) + \tfrac{(x-t)^2}{2!}f''(t) + \ldots + \tfrac{(x-t)^n}{n!}f^n(t) \ ,$$

$$\psi_1(t) = (x - t)^{n+1} \ , \ \psi_2(t) = t$$

und wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz einmal auf das Paar φ, ψ_1 und einmal auf das Paar φ, ψ_2 (jeweils für das Intervall mit Endpunkten x_1, x_0) an. Wegen

$$\varphi'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ und } \varphi(x) - \varphi(x_0) = R_n(x)$$

ergibt sich:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (Lagrange)

und auch $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x - x_0)(x - \zeta)^n$ (Cauchy) ,

hierbei ist jeweils ζ geeignet aus dem offenen Intervall mit Endpunkten x und x_0 zu nehmen.

Satz 2.10. *f sei unendlich oft differenzierbar auf X. Genau dann konvergiert die Funktionenfolge $g_0(x), g_1(x), \ldots$ auf X gegen die Funktion $f(x)$, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für alle $x \in X$ gilt.*

Man nennt die so gewonnene Darstellung von $f(x)$, $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$, die Entwicklung von f in ihre Taylorreihe bei x_0.

Bemerkung: Die Reihen für e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$ sind die Taylorreihen dieser Funktion bei $x_0 = 0$.

Zusatz: Falls die $f^{(n)}$ auf X gleichmäßig beschränkt sind, d.h. $|f^{(n)}(x)| \le s$ für alle $x \in X$ und alle n, so gilt: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Überraschenderweise kann dieser Zusatz in den Voraussetzungen abgeschwächt werden aufgrund des folgenden schönen Satzes von Bernstein.

Satz. *x_0 sei kein Randpunkt von X und f sei unendlich oft differenzierbar auf X. Wenn für alle n und für alle x gilt, daß $f^{(n)} \ge c$ (oder $f^{(n)}(x) \le c$) (d.h. die $f^{(n)}$ sind gleichmäßig beschränkt nach links (bzw. nach rechts)), so folgt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ auf jedem in X enthaltenen offenen Intervall mit Mittelpunkt x_0.*

Literatur: siehe etwa [Du] und [Ma] unter “Taylorreihe”.

Drei Ergänzungen : Die erste ist ein Satz von Weierstraß

> *f sei eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom $g_\varepsilon(x)$ mit: $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$.*

Mit anderen Worten: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion läßt sich beliebig genau gleichmäßig durch Polynome approximieren (die Entwicklung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion in ihre Taylorreihe liefert dagegen eine explizite und viel genauere Approximation durch Polynome!).

Hier ist der Grund: Die Stetigkeit von f erzwingt die gleichmäßige Stetigkeit auf $[a, b]$; des weiteren nimmt f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall das Maximum und Minimum an. Nun approximiere f zuerst durch ein *Polygon*, das ist eine Folge von Streckenabschnitten, die in der (x, y)-Ebene die Punkte (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) mit $1 \le i \le n$, $x_i < x_{i+1}$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$, $y_i = f(x_i)$ verbinden. Diese Streckenabschnitte sind Funktionen des Typs $y = c + a_i\Big((x - x_i) - |x - x_i|\Big)$ – und daraus erkennt man, daß es für den Beweis des Satzes ausreicht, die stetige Funktion $x \mapsto |x|$ durch Polynome zu approximieren. Nun gilt $|x| = \Big(1 - (1 - x^2)\Big)^{\frac{1}{2}}$ und wir verwenden die binomische Reihe.

(2a) Vorgelegt seien die beiden Folgen (a_i) und (b_i). Man interessiert sich für die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$.

Abelsches Kriterium: *Diese Reihe konvergiert, falls $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergiert und (a_i) eine monotone und beschränkte Folge ist.*

Folgerung. *Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, die für $x = r$ (oder für $x = -r$) konvergiert, so ist sie auch bei $x = r$ (bzw. bei $x = -r$) stetig.*

Insbesondere gilt

(i) $\log 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - + \ldots$

(ii) *ist $\alpha > 0$, so konvergiert die binomische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$ gleichmäßig und absolut für $-1 \leq x \leq 1$ und stellt hier die Taylorreihe der Funktion $(1+x)^\alpha$ dar* (die Konvergenz wird direkt überprüft).

(2b) Dirichletsches Kriterium: *$\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ konvergiert, falls die Folge $(\sum_{i=0}^{n} b_i)_{n=0,1,2,\ldots}$ beschränkt ist, und falls die Folge (a_i) monoton gegen Null konvergiert.*

Anwendung: Eine Reihe der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ heißt eine Dirichletsche Reihe. Konvergiert diese für $x = x_0$, so auch für alle $x > x_0$.

(3) Das Lagrangesche Restglied $R_1(x)$ zeigt: *Ist f zweimal stetig differenzierbar auf (a,b) und $x_0 \in (a,b)$, so gilt: x_0 ist ein relatives Maximum (Minimum) von f in (a,b), genau wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$) ist.*

Literatur: [Co, Anhang zu Kap. 6; Fi, Bd II, Kap.XI,XII; Ho,§46; BF,9.3]

4. Das Integral [7]

Wir wenden uns als nächstes der Bestimmung des Flächeninhalts $I(F)$ eines ebenen Flächenstücks F [8] zu, welches von endlich vielen hinreichend glatten Kurvenstücken begrenzt ist. Sind diese alles Geraden, so kann F in Dreiecke zerlegt und daraus der Inhalt $I(F)$ abgelesen werden. Damit reduziert sich die Berechnung von $I(F)$ auf solche F, die in der kartesischen (x,y)-Ebene von den Strecken $\{x = a,\ y \in [0, c_1]\}, \{x \in [a,b],\ y = 0\}, \{x = b,\ y \in [0, c_2]\}$ und *nur einer* Kurve $\{x, f(x)\}$ mit $f(a) = c_1,\ f(b) = c_2$ begrenzt wird.

Definition. *Eine Teilung $T = T_{n,l_n}$ von $[a,b]$ ist eine Folge von $n+1$ Zahlen*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

mit $l_n = \max\ \{x_i - x_{i-1}\ :\ 1 \leq i \leq n\}$. Der Teilung T und einer auf $[a,b]$ beschränkten Funktion $f(x)$ sind die folgenden Zahlen zugeordnet:

$m_i = \inf\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ ,\ 1 \leq i \leq n$

$M_i = \sup\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ ,\ 1 \leq i \leq n$

$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\ ,\ S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\,;$

s heißt die Untersumme, S die Obersumme von f in bezug au T.

[7] Ab diesem Kapitel wird auf Literaturhinweise verzichtet – inzwischen ist wohl ein Analysisbuch ganz nach persönlichem Geschmack gefunden und ausgesucht.

[8] später auch der Berechnung der Länge eines Kurvenbogens sowie des Volumens und des Oberflächeninhalts eines Drehkörpers

Satz 4.1. *1)* $s \leq S$

2) Ist T' eine feinere Teilung von $[a,b]$ als T, i.e., $\{x_i \ : \ 0 \leq i \leq n\} \subset \{x'_j \ : \ 0 \leq j \leq n'\}$, und ist s', S' Unter- bzw. Obersumme zu T' so gilt:

$$s' \geq s \ , \ S' \leq S \, .$$

3) Sind T und T' irgend zwei Teilungen von $[a,b]$, so gilt $s \leq S'$ für die Untersumme s von T und die Obersumme S' von T'.

Definition. *Setze $\underline{I} = \sup\{s\}$ und $\overline{I} = \inf\{S\}$, wobei Supremum und Infinum über alle Teilungen von $[a,b]$ gebildet sind. Die auf $[a,b]$ beschränkte Funktion $f(x)$ heißt integrierbar auf $[a,b]$, falls $\underline{I} = \overline{I}$. Dieser gemeinsame Wert wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet und heißt das Riemann-Integral von f über $[a,b]$.*

Satz 4.2. *Die auf $[a,b]$ beschränkte Funktion f ist genau dann auf $[a,b]$ integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung T von $[a,b]$ mit $S - s < \varepsilon$ existiert.*

Es folgt:

(I1) Monotone Funktionen sind integrierbar.

(I2) Stetige Funktionen sind integrierbar.

(I3) Sind f, g integrierbar auf $[a,b]$ und c_1, c_2 reelle Zahlen, so ist $c_1 f + c_2 g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

(I4) Für $a < b < c$ und sowohl auf $[a,b]$ als auch auf $[b,c]$ integrierbarem f gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Definition. *Für $a < b$ und auf $[b,a]$ integrierbarem f setze $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.*

Mit dieser Definition bleibt (I4) richtig für beliebige a, b, c.

(I5) $\lim_{n\to\infty} l_n = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} s(T_{n,l_n}) = \underline{I} \\ \lim_{n\to\infty} S(T_{n,l_n}) = \overline{I} \end{cases}$

(I6) Sind f und g integrierbar auf $[a,b]$ und gilt dort überall $f(x) \geq g(x)$, so ist auch

$$\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)dx \ .$$

Sind f und g sogar stetig auf $[a,b]$, so gilt Gleichheit bei den Integralen nur für $f = g$.

(I7) Mit f ist auch $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(I8) [*Mittelwertsatz*] Ist $f(x)$ stetig auf $[a,b]$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ .$$

Anwendungen:

1) $\int_a^b dx = b - a$

2) $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$, $\int_a^b x^2 dx \ = \ \frac{b^3-a^3}{3}$, ...

3) $\int_a^b \sin x\, dx \ = \ \cos a - \cos b$

(Wähle dazu Teilungen T_{n,l_n} wie folgt: $x_i = a + il_n$ mit $l_n = \frac{b-a}{n}$.)

Satz 4.3. *1) $(f_n(x))$ sei eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$, die dort gleichmäßig gegen die integrierbare Funktion $f(x)$ konvergiere. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx$.*

2) $(f_n(x))$ sei eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$ deren Summe dort gleichmäßig gegen die integrierbare Funktion $f(x)$ konvergiere. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Definition. *$f(x)$ sei auf $[a,b]$ stetig und c irgendein Punkt aus $[a,b]$. Für $a \leq x \leq b$ heißt*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

ein unbestimmtes Integral von $f(x)$.

Bemerkung: Zwei unbestimmte Integrale von $f(x)$ unterscheiden sich um eine Konstante.

Satz 4.4. *[Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung] Das unbestimmte Integral $F(x)$ von $f(x)$ ist differenzierbar (in x) und es gilt $F'(x) = f(x)$.*

Bemerkungen:

1) Ist $f(x)$ stetig auf $[a,b]$, so ist jede auf einem abgeschlossenen Teilintervall von $[a,b]$ differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ [9] ein unbestimmtes Integral von $f(x)$.

2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ für jedes F wie in 1).

3) $d\int = \int d =$ Identität (bis auf additive Konstante).

[9] F heißt dann eine Stammfunktion von f

FOLGERUNG.

$f(x) =$	$F(x) =$
x^a , $a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$1/x$	$\log x$
e^x	e^x
a^x , $a > 0$	$a^x / \log a$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/1 + x^2$	$\arctan\, x$
$\log x$	$x \log x - x$

SATZ 4.5. *[Partielle Integration] f und g seien auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\,.$$

SATZ 4.6. *[Substitutionsregel] $\varphi(t)$ sei auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und streng monoton. $f(x)$ sei stetig auf $\varphi([a, b]) = [\alpha, \beta]$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Beispiele:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!} & , \quad n = 2m+1 \\ \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \cdot \pi/2 & , \quad n = 2m \end{cases}$$

$\int^x t^2 \cos t\, dt = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$

$\int^x \sin kt\, dt = -1/k \cos kx + c$

$\int^x \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1 + x^2} + c$

Rationale Funktionen :

1) Jede rationale Funktion ist Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen--rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ $(p(x), q(x) \neq 0$ Polynome, grad $p <$ grad q oder $p = 0)$.

2) Jede echt gebrochen-rationale Funktion ist Summe von

$$\frac{c}{(x-a)^n}\;,\; \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^n}\;,\; a, c, d,\; 0 \neq b \in \mathbb{R},\; n \geq 1$$

3) $\int^x \frac{c}{(t-a)^n} dt = \begin{cases} c \log |x - a| + c_1 & , \quad n = 1 \\ \frac{-c}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c_1 & , \quad n > 1 \end{cases}$

für jedes Intervall, das a nicht enthält.

$$\int^x \frac{ct+d}{((t-a)^2+b^2)^n}dt = \begin{cases} \frac{c}{2}\log\frac{(x-a)^2+b^2}{b^2} & + \quad \frac{ca+d}{b}\arctan(\frac{x-a}{b}) + c_1 \quad , \quad n=1 \\ \frac{-c}{2n-2}\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}} & + \quad \frac{ca+d}{b^{2n-1}}\int^{\frac{x-a}{b}}\frac{dt}{(t^2+1)^n} \quad , \quad n>1 \end{cases}$$

4) $\int^x \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}\ ,\ n>1$

Uneigentliche Integrale:

Hier handelt es sich um Grenzwerte

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt\ ,\ x\in[a,b)\ ,\ b\le\infty$$

von auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a,b)$ integrierbaren Funktionen f. (Bei b kann f z.B. unstetig sein).

Satz 4.7. *$f(x)$ sei ≥ 0 und integrierbar in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a,b)$. $g_1(x)$ und $g_2(x)$ seien auf $[a,b)$ definiert, so daß entweder $[\,f(x)\le g_1(x)\ ,\ \int_a^b g_1(x)dx$ existiere$]$ oder $[\,0\le g_2(x)\le f(x)\ ,\ \int_a^b g_2(x)dx$ existiere nicht.$]$*
Dann existiert im ersten Fall auch $\int_a^b f(x)dx$, im zweiten Fall existiert $\int_a^b f(x)dx$ nicht.

Beispiel: *Die Gammafunktion*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx\ , \quad z\ge 1 \\ &= -x^{z-1}e^{-x}\,|_0^\infty + (z-1)\int_0^\infty x^{z-2}e^{-x}dx \\ \text{i.e., }\Gamma(z) &= (z-1)\Gamma(z-1)\,, \quad \Gamma(n)=(n-1)!\text{ für } n\in\mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang seien zwei wichtige Formeln eingeschoben:

$$[Wallis]\quad \begin{cases} \pi/2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^2 4^2\cdots(2n)^2}{1\cdot3\cdot3\cdot5\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)} \\ \sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \end{cases}$$

[*Stirling*] $\quad n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, i.e., der Quotient aus beiden Seiten strebt für $n\to\infty$ nach 1.

5. Kurven und Drehkörper

Unter einer Parameterdarstellung einer Kurve K verstehen wir zwei auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktionen $x(t)$ und $y(t)$; die Kurve K selbst ist die Menge der Punkte $P(t) = (x(t),y(t))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ,\ t\in[a,b]$.

Bemerkungen:

1) $P(t)$ hängt stetig von t ab, i.e., $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ (|t_2-t_1|<\delta\Longrightarrow \text{dist }(P(t_1),P(t_2))<\varepsilon)$; hier bezeichnet dist (P_1,P_2) die Länge der Strecke P_1P_2.

2) Die Kurve K heißt einfach, wenn die Zuordnung $t\to P(t)$ umkehrbar eindeutig ist. Nicht einfache Kurven besitzen also mehrfache Punkte (etwa Doppelpunkte).

3) Eine einfache Kurve ist orientiert: $P(t_1)$ kommt vor $P(t_2)$, wenn $t_1<t_2$.

4) Ist $t(\tau)$ eine auf $[\alpha, \beta]$ stetige und streng monotone Funktion mit Bild $[a, b]$, so kann $K = \{P(t)\}$ auch mit dem Parameter τ dargestellt werden: $\tau \mapsto Q(\tau) = P(t(\tau))$.

5) Existiert die Umkehrfunktion $t(x)$ zu $x(t)$, so wir können $y(t) = f(x)$ schreiben: das ist die wohl eher gewohnte Schreibweise für eine Kurve [10].

6) Sind $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$, so nennen wir die Kurve K glatt; gilt noch $\dot{x}(t) \neq 0$ [11], so daß also $t(x)$ existiert, erhalten wir aus der Kettenregel

$$f'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t) \ .$$

Beispiele: Der Kreis $x = a \cos t,\ y = a \sin t\ ,\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0$ ist eine geschlossene einfache glatte Kurve, ebenso die Ellipse $x = a \cos t,\ y = b \sin t\ ,\ t \in [0, 2\pi]\ ,\ a, b > 0$.

Flächeninhalt und Kurvenintegral:

Gegeben sei eine stückweise glatte Kurve K in Parameterdarstellung $x(t), y(t),\ t \in [a, b]$ [12]. Dann heißt

$$\int_K y dx \ = \ \int_a^b y(t)\dot{x}(t) dt$$

das Kurvenintegral zu K. Ist K geschlossen, i.e., $P(a) = P(b)$, gibt

$$-\int_K y dx \ = \ -\oint y dx \ = \ \oint x dy \ = \ 1/2 \oint (x dy - y dx)$$

den von K eingeschlossenen Flächeninhalt an, sofern die Orientierung von K so gewählt ist, daß die Fläche zur Linken liegt [13].

Bogenlänge:

$f(x)$ sei auf $[a, b]$ stetig differenzierbar; K sei die Kurve $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$.

Satz 5.1. *$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ ist die Länge von K.*

Bemerkung: Liegt K in Parameterdarstellung $x(t), y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ vor, so gilt auch $s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$.

Drehkörper:

$f(x)$ sei stetig und > 0 in $[a, b]$. Der Bereich $\{(x, y_x) : x \in [a, b],\ 0 \leq y_x \leq f(x)\}$ rotiere um die x-Achse. V bezeichne das Volumen und O den Oberflächeninhalt des entstandenen Drehkörpers.

---

[10] auch die neue Beschreibung von Kurven kann mit unserer Anschauung weit auseinanderklaffen: so gibt es sogenannte Peanokurven $P(t) = (x(t), y(t))$ mit stetigen Funktionen $x(t), y(t)$, deren Punkte ein ganzes Quadrat ausfüllen

[11] der Punkt bezeichnet die Ableitung nach t

[12] *Stückweise glatt* heißt, daß es endlich viele Teilpunkte $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt und daß $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leq i \leq n$ sind.

[13] In unserer ursprünglichen Notation $y = f(x)$ hat die von der Kurve f und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $\left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$.

Satz 5.2. $V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2 dx \ , \ O = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx.$

6. Fourierreihen

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode $p>0$, falls $f(x+p)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ richtig ist. Es folgt $f(x+np)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und alle $n\in\mathbb{Z}$. Die Substitution $x=\frac{p}{2\pi}y$ verwandelt f in eine Funktion $\tilde{f}$ mit der Periode 2π : $\tilde{f}(y)=f(\frac{p}{2\pi}y)$; wir nehmen deshalb von nun an immer $p=2\pi$ an.

Beispiel: Trigonometrische Reihen $s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$.

Bemerkung: Ist f integrierbar, so gilt

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \text{ für jedes } a\in\mathbb{R}\ .$$

Definition. *Jede in $[-\pi,\pi]$ gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe*

$$s(x) \ = \ \frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

heißt eine Fouriersche Reihe.

Es stellt sich die Frage, ob jede periodische Funktion, die hinreichend glatt ist, so aussieht.

Satz 6.1. *[Orthogonalitätsrelationen der Kreisfunktionen]*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\sin\nu x\,dx \ = \ 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\cos\nu x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin\mu x\sin\nu x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu\neq\nu \\ \pi & \text{für} \quad \mu=\nu\end{cases}$$

Folgerung. *Für die Fouriersche Reihe $s(x)$ gilt:*

$$a_\nu = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\cos\nu x\,dx \ , \ \nu\geq 0$$

$$b_\nu = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\sin\nu x\,dx \ , \ \nu\geq 1\ .$$

Satz 6.2. *$f(x)$ sei differenzierbar auf $[-\pi,\pi]$ mit $f(-\pi)=f(\pi)$. Des weiteren sei f' beschränkt und stückweise stetig auf $[-\pi,\pi]$. Setze*

$$a_\nu = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx \ , \ \nu\geq 0$$

$$b_\nu = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx \ , \ \nu\geq 1\ .$$

Dann ist $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$ eine Fourierreihe.

Anhang: Komplexe Zahlen und Fourierreihen

1. Die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ sind die Vektoren $z = a \cdot 1 + b \cdot i \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot i$ mit den Koordinaten $a = \Re(z), b = \Im(z) \in \mathbb{R}$ und der Basis 1, i. Statt $a \cdot 1 + b \cdot i$ schreibt man einfach $a + ib$ oder $a + bi$. Es gelten also die Rechenregeln

$$a + ib = \tilde{a} + i\tilde{b} \iff a = \tilde{a}, b = \tilde{b}; \quad z = 0 \iff \Re(z) = \Im(z) = 0$$
$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)\,.$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist so definiert:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)\,, \text{ also } i^2 = -1.$$

$\mathbb{C}$ ist ein Körper: das Inverse von $0 \neq z = a + ib$ ist $\frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2}$ mit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =$ Länge von z. Insbesondere genügen Realteil a und Imaginärteil b einer komplexen Zahl z_0 der Länge 1 der Gleichung $a^2 + b^2 = 1$, i.e., $\exists!\ \varphi \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, woraus für beliebiges $0 \neq z \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung $z = \lambda(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $\lambda = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ resultiert. Als Folge der Additionstheoreme der Kreisfunktionen erhält man (mit offensichtlicher Notation)

$$z_1z_2 = \lambda_1\lambda_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big)\,,\ \varphi_1 + \varphi_2 \text{ modulo } 2\pi \text{ gerechnet.}$$

Die formale Reihe $e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!} = \cos b + i\sin b$ legt die Definition

$$e^z = e^a(\cos b + i\sin b) \text{ für } z = a + ib$$

nahe; es gilt dann $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} + e^{z_2}$ und $|e^z| = e^a$.

2. Mit Blick auf die trigonometrische Summe $\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x)$ setze man

$$\cos\nu x + i\sin\nu x = e^{i\nu x} \text{ und entsprechend } \cos(-\nu x) + i\sin(-\nu x) = e^{-i\nu x}\,.$$

Dann wird $e^{i\nu x} + e^{-i\nu x} = 2\cos\nu x$, $e^{i\nu x} - e^{-i\nu x} = 2i\sin\nu x$ und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$$

mit $c_\nu = \frac{a_\nu - ib_\nu}{2}$ $(\nu \neq 0)$, $c_0 = a_0/2$ (oder $a_\nu = c_\nu + c_{-\nu}$, $b_\nu = i(c_\nu - c_{-\nu})$).

3. In Satz 6.2 dürfen die Voraussetzungen abgeschwächt werden:

$f(x)$ und $f'(x)$ seien stückweise stetig und beschränkt auf $[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe zu f gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall $\subset [-\pi, \pi]$, das keine Sprungstelle von f enthält, und stellt dort f dar. Sie konvergiert auch an den Sprungstellen x_0 von f und zwar gegen $\frac{1}{2}(f(\lim_{x\searrow x_0} x) - f(\lim_{x\nearrow x_0} x))$.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Periodizität einer Funktion erzwingen.

Die Fourierreihe für $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi]$ liefert am Punkt $\pi/2$ die Leibnizreihe

$$\pi/4 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - + \ldots.$$

Die Fourierreihe für $f(x) = x^2/2$ in $[-\pi, \pi]$ gibt bei

$$\begin{array}{ll} x = 0\ : & \pi^2/12 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - + \ldots \\ x = \pi\ : & \pi^2/6 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ . \end{array}$$